Решения задач для 8 класса

8.1. (9 баллов) Кубик с ребром a = 5,00 см и массой m = 200,0 грамм плавает в прямоугольном сосуде (длина 20,0 см, ширина 10,0 см, высота 20,0 см) с жидкостью плотности = 2,00 г/см^3.

[1] Сколько воды (плотность 1,00 г/см^3) необходимо долить в сосуд, чтобы тело начало тонуть? Ответ дать в литрах.

Замечание. Начальное количество жидкости равно 2,45 литра. Ускорение свободного падения принять равным 10,0 м/с^2. *(А.Б. Яковлев)*

Ответ: а) Если жидкости смешиваемые, задача не имеет решения; б) Если жидкости несмешиваемые, то необходимо долить 0,175 литра воды..

Решение. 1) Возможны два случая - когда жидкости смешиваемые и когда нет. Рассмотрим оба случая. Сделаем некоторые предварительные вычисления:
Плотность кубика: $\rho = \frac{m}{a^3} = \frac{0.200}{(0.0500)^3} = 1.60$г/см^3.
Объем сосуда: $V_v = 20{,}0 \times 10{,}0 \times 20{,}0 = 4000$см^3 = 4,00л
Площадь основания сосуда: $S = 20{,}0 \times 10{,}0 = 200$см^2
2) Смешиваемые жидкости. Чтобы тело утонуло, средняя плотность смеси должна стать меньше плотности кубика:

$$\frac{\rho_1 V_0 + \rho_2 V}{V_0 + V} < \rho.$$

где ρ_1,ρ_2 - плотности жидкости и воды соответственно, V_0,V - начальный объем, занимаемый жидкостью, и объем воды, который необходимо долить. Решая это неравенство относительно V:

$$V > \frac{\rho_1 - \rho}{\rho - \rho_2} V_0 = 1{,}63\text{л}.$$

Заметим, что в таком случае суммарный объем жидкостей больше объема сосуда. Значит, этот случай не реализуется.
3) Несмешиваемые жидкости. Чтобы кубик утонул, необходимо долить столько воды, чтобы уровень жидкости был на уровне верхней грани кубика.
Условие плавания кубика:

$$\rho_1 g V_3 = mg$$

Откуда объем погруженной части:

$$V_3 = \frac{m}{\rho_1}$$

А значит, глубина погружения равна:

$$h = \frac{V}{a^2} = \frac{m}{\rho_1 a^2}$$

Высота выступающей части:

$$H = a - h = a - \frac{m}{\rho_1 a^2}$$

Тогда необходимый объем воды, с учетом, что кубик занимает часть объема:
$V = SH - a^2 H = (S - a^2)(a - \frac{m}{\rho_1 a^2}) = 175$ см^3 = 0,175 л

8.2. **(8 баллов)** Группе легкомоторных спортивных самолетов поставлена задача одновременно вылетев из пункта А сбросить в пункте В вымпел и вернуться назад. Расстояние от А до В 450 км. В каждом самолете бак вмещает 240 литров топлива, 1 литр которого позволяет пролететь 2,5 км при крейсерской (наиболее экономичной) скорости в 300 км/час.

[2] Какое минимальное количество самолетов должно быть в группе, чтобы выполнив задание все они вернулись в А, если возможна мгновенная перекачка топлива из самолета в самолет?

[3] Какое суммарное количество часов самолеты будут находиться в воздухе?

(*Г.А. Гамов, А.Б. Яковлев*)

Ответ: 3.
Ответ: 6 ч.
Решение. 1) Введем обозначения:
Объем бака: V = 240л
Расход топлива: $\alpha = \frac{1}{2{,}5}$ л/км
Скорость самолетов: v = 300 км/ч
Расстояние от пункта А до В и обратно: S = 900 км
Будем решать задачу итеративно, рассматривая сначала один самолет, потом два и так далее.
2) Пусть летит один самолет. Тогда максимальное расстояние, которое он сможет пролететь:

$$S_0 = \frac{V}{\alpha} = 600\text{км}$$

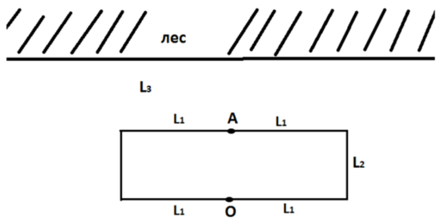
Таким образом, самолет не долетит $\Delta S = S - S_0 = 300\text{км}$, и ему понадобится $\Delta V = \Delta S\alpha = 120\text{л}$ дополнительного топлива, то есть полбака.
3) Пусть летят два самолета. Ясно, что одному из самолетов необходимо пролететь ΔS, перекачать полбака топлива другому самолету и развернуться. Иначе, если он пролетит меньше или больше, чем ΔS, он не сможет передать необходимое количество топлива второму самолету, чтобы тот завершил полет в А. Однако к этому моменту он уже израсходует полбака топлива, а значит, если он отдаст второую половину бака, то сам не сможет вернуться в А.
4) Пусть летят три самолета. Рассмотрим следующую стратегию. Пусть самолеты пролетят $\Delta S/2$, тогда они израсходуют по четверти своего бака. В этот момент один из самолетов перекачивает свое топливо другим самолетам до полного бака. Тогда у него останется ровно четверть бака, и этого достаточно, чтобы вернуться обратно. Дальше оставшиеся самолеты пролетят еще $\Delta S/2$, снова расходуя по четверти бака. Один из самолетов перекачивает свое топливо второму до полного бака. Тогда у него останется ровна половина бака, чего как раз достаточно, чтобы он вернулся обратно в А. У второго же самолета при этом будет полный бак, на котором он долетит оставшийся ему путь.
5) Вычислим суммарное количество часов, которое самолеты будут находиться в воздухе. Суммарное пройденное расстояние:

$$L = 2 * (\Delta S/2 + \Delta S + S/2) = 3\Delta S + S$$

А значит суммарное время в воздухе:

$$T = \frac{L}{v} = \frac{3\Delta S + S}{v} = 6\text{ч}$$

8.3. (8 баллов) Саша, Юра, Алексей и Аня играют в прятки на окраине поселка (см. рисунок). Указанные на рисунке параметры следующие: $L_1 = 10$ м , $L_2 = 5$ м , $L_3 = 8$ м. Водящий Саша начинает игру за сараем в точке O, а Юра, Алексей и Аня с другой стороны сарая в точке A. Как быстро Саша должен досчитать до десяти прежде чем идти искать, чтобы



[4] увидеть всех игроков до того как они сумеют спрятаться в лесу,

[5] увидеть кого-либо из игроков до того как они сумеют спрятаться в лесу?

Замечание. Известно, что скорости с которыми могут двигаться игроки следующие: Саша - 5 м/с, Юра - 3,5 м/с, Алексей - 3 м/с, Аня - 2 м/с. (*А.Б. Яковлев, А.А. Черенков*)

Ответ: Саша не сможет увидеть всех игроков.

Ответ: 1,2 с (1 с).

Решение. 1) Обозначим углы сарая, начиная с верхнего левого и далее по часовой стрелке, за K,L,M,N, точку лесополосы прямо напротив точки A обозначим за P. Для того чтобы Саша смог увидеть остальных игроков ему необходимо выбрать правильную стратегию. Так как другие игроки не знают, в какую сторону Саша начнет движение, им выгодно не отклоняться от прямолинейного маршрута до леса, то есть они побегут по отрезку AP. Таким образом, Саше необходимо как можно быстрее увидеть точку P. В силу симметрии задачи можно считать, что Саша начнет движение влево. Найдем слепую зону слева от сарая, из которой не видно точку P. Для этого продлим PK до пересечения с ON в точке R. Тогда треугольник KRN определяет слепую зону. Ясно, что в любом случае Саша начнет движение вдоль ON, и когда он окажется в точке N, ему необходимо как можно быстрее выбраться из слепой зоны. Тогда Саша будет двигаться по кратчайшему расстоянию от точки N до прямой KR - по высоте NH треугольника KRN.

2) Вычислим теперь путь, который необходимо пройти Саше. Для начала из подобия треугольников APK и KRN получим, что

$$\frac{AP}{AK} = \frac{KN}{NR}$$

Значит

$$NR = \frac{KN * AK}{AP} = l_1 \frac{l_2}{l_3}$$

В треугольнике KRN по теореме Пифагора:

$$RK = \sqrt{NR^2 + NK^2} = l_2 \sqrt{1 + \frac{l_1^2}{l_3^2}}$$

Найдем NH, вычислив площадь треугольника KRN двумя способами:

$$S = \frac{1}{2} NH * RK = \frac{1}{2} NR * NK$$

откуда

$$NH = \frac{NR * NK}{RK} = \frac{l_1 l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_3^2}}$$

Таким образом, Саше необходимо пройти

$$S = ON + NH = l_1 (1 + \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_3^2}})$$

и это расстояние Саша проходит за время

$$t_1 = \frac{S}{v_s} = 2{,}8c$$

3) Чтобы Саша смог увидеть всех игроков, ему надо успеть пройти расстояние S до того, как самый быстрый игрок - Юра - скроется в лесу,пройдя расстояние $PQ = l_3$. Таким образом, Юра достигнет леса через:

$$t_2 = \frac{l_3}{v_y} = 8/3{,}5 = 2{,}3c$$

Получаем, что $t_1 > t_2$. Значит, даже если Саша не будет считать, а сразу пойдет искать ребят, то он все равно не успеет увидеть их всех, так как Юра успеет скрыться в лесу
4) Чтобы Саша смог увидеть хоть кого-то, ему надо успеть пройти расстояние S до того, как самый медленный игрок - Аня - скроется в лесу, пройдя расстояние $PQ = l_3$. Таким образом, Аня достигнет леса через:

$$t_3 = \frac{l_3}{v_a} = 8/2 = 4c$$

Таким образом, у Саши в запасе есть $\Delta t = t_3 - t_1 = 1{,}2c$, поэтому считать он должен не дольше 1,2 с.
Замечание Принимается также очевидное, но не оптимальное решение, в котором Саша все время двигается вдоль сарая.
1) Чтобы Саша смог увидеть всех игроков, ему надо успеть пройти расстояние $S = ON + NK = l_1 + l_2$ до того, как самый быстрый игрок - Юра - скроется в лесу, пройдя до него кратчайшим путем, то есть пройдя расстояние l_3. Таким образом, время, которое необходимо Саше, чтобы пройти расстояние S:

$$t_1 = \frac{S}{v_s} = 15/5 = 3c$$

Юра достигнет леса через:

$$t_2 = \frac{l_3}{v_y} = 8/3{,}5 = 16/7c$$

Таким образом, $t_1 > t_2$. Значит, даже если Саша не будет считать, а сразу пойдет искать ребят, то он все равно не успеет увидеть их всех, так как Юра успеет скрыться в лесу
2)Чтобы Саша смог увидеть хоть кого-то, ему надо успеть пройти расстояние S до того, как самый медленный игрок - Аня - скроется в лесу,пройдя до него кратчайшим путем, то есть пройдя расстояние l_3,
Аня достигнет леса через:

$$t_3 = \frac{l_3}{v_a} = 8/2 = 4c$$

Таким образом, у Саши в запасе есть $\Delta t = t_3 - t_1 = 1c$, поэтому считать он должен не дольше 1с.

8.4. (5 баллов) При нагревании тела от температуры 20^o С до температуры 50^o С необходимо подвести 1200 Дж тепла, от температуры 50^o С до температуры 100^o С необходимо подвести 2000 Дж тепла, от температуры 100^o С до температуры 140^o С необходимо подвести 800 Дж тепла, от температуры 140^o С до температуры 165^o С необходимо подвести 500 Дж тепла.
[6] Какое минимальное количество теплоты надо подвести к телу чтобы нагреть его от температуры 90^o С до температуры 130^o С, если предположить что теплоемкость изменяется наиболее простым образом?
(А.Б. Яковлев)

Ответ: 1000 Дж.

Решение. 1) Чтобы определить характер зависимости теплоемкости от температуры вычислим средние теплоемкости на каждом из заданных интервалов температур:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{Q_1}{\Delta T_1} = \frac{1200}{50-20} = 40\text{Дж/К}, \quad T \in [20{,}50) \\ C_2 = \frac{Q_2}{\Delta T_2} = \frac{2000}{100-50} = 40\text{Дж/К}, \quad T \in [50{,}100) \\ C_3 = \frac{Q_3}{\Delta T_3} = \frac{800}{140-100} = 20\text{Дж/К}, \quad T \in [100{,}140) \\ C_4 = \frac{Q_4}{\Delta T_4} = \frac{500}{165-140} = 20\text{Дж/К}, \quad T \in [140{,}165) \end{cases}$$

Так как средние теплоемкости совпадают на первых двух интервалах температур и на последних двух, можно сделать вывод, что на этих интервалах теплоемкость постоянна (по условию она меняется наиболее простым образом). Получаем:

$$C = \begin{cases} C_{01} = 40\text{Дж/К}, \quad T \in [20{,}100) \\ C_{02} = 20\text{Дж/К}, \quad T \in [100{,}165) \end{cases}$$

2) Таким образом, чтобы рассчитать количество теплоты, необходимое для нагрева тела от 90 до 130 градусов, разобьем процесс на два этапа - нагрев от 90 до 100 и нагрев от 100 до 130 градусов. Получим, что:

$$Q = Q_{90\to100} + Q_{100\to130} = C_{01}\Delta T_{90\to100} + C_{02}\Delta T_{100\to130} = 400 + 600 = 1000\text{Дж}.$$

8.5. (6 баллов) Группа спасателей ищет ночью потерявшегося в лесу ребенка, выстроившись в цепочку с расстоянием между спасателями в 20,0 метров. Через равные промежутки времени цепочка останавливается, подает сигнал и слушает ответ потерявшегося ребенка.

[7] Определите максимальное допустимое время между остановками, если скорость движения спасателей 2,00 м/с и расстояние, на котором можно четко расслышать ответ ребенка, равно 30,0 метров.

(*А.Б. Яковлев*)

Ответ: 28,3 с.

Решение. 1) Переведем задачу на геометрический язык. Область, в которой хорошо слышно потерявшегося ребенка - круг радиуса $R = 30$м. Цепочка спасателей - прямая, с расставленными на равных расстояниях $2l = 20$ м точками. Максимальное допустимое время между остановками реализуется в случае, когда ребенок находится ровно между двумя спасателями, а спасатели на обеих остановках находятся на границе области слышимости ребенка. Таким образом, задача сводится к отысканию расстояния между двумя параллельными хордами длиной 2l в окружности радиуса R.

2) Таким образом, проведем радиусы в концы одной из хорд, получится равнобедренный треугольник. Проведем в нем высоту, являющейся половиной искомого расстояния между хордами (в силу симметрии задачи). Высоту найдем по теореме Пифагора, учтя, что проведенная высота делит хорду пополам. Таким образом, искомое расстояние:

$$S = 2h = 2\sqrt{R^2 - l^2}$$

3) Теперь можем определить время между оставновками:

$$T = \frac{S}{v} = \frac{2\sqrt{R^2 - l^2}}{v} = 28{,}3\text{с}$$

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024–2025 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 9 класса

9.1. (8 баллов) Кубик с ребром а= 5,00 см и массой m=200,0 грамм плавает в прямоугольном сосуде (длина 20,0 см, ширина 10,0 см, высота 20,0 см) с жидкостью плотности =2,00 г/см^3 .

[1] Сколько воды (плотность 1,00 г/см^3) необходимо долить в сосуд, чтобы тело начало тонуть? Ответ дать в литрах.

Замечание. Начальное количество жидкости равно 2,45 литра. Ускорение свободного падения принять равным 10,0 м/с^2 . *(А.Б. Яковлев)*

Ответ: а) Если жидкости смешиваемые, задача не имеет решения; б) Если жидкости несмешиваемые, то необходимо долить 0,175 литра воды..

Решение. 1) Возможны два случая - когда жидкости смешиваемые и когда нет. Рассмотрим оба случая. Сделаем некоторые предварительные вычисления:
Плотность кубика: $\rho = \frac{m}{a^3} = \frac{0.200}{(0.0500)^3} = 1.60$г/см^3.
Объем сосуда: $V_v = 20{,}0 \times 10{,}0 \times 20{,}0 = 4000$см$^3 = 4{,}00$л
Площадь основания сосуда: $S = 20{,}0 \times 10{,}0 = 200$см^2
2) Смешиваемые жидкости. Чтобы тело утонуло, средняя плотность смеси должна стать меньше плотности кубика:

$$\frac{\rho_1 V_0 + \rho_2 V}{V_0 + V} < \rho.$$

где ρ_1,ρ_2 - плотности жидкости и воды соответственно, V_0,V - начальный объем, занимаемый жидкостью, и объем воды, который необходимо долить. Решая это неравенство относительно V:

$$V > \frac{\rho_1 - \rho}{\rho - \rho_2} V_0 = 1{,}63\text{л}.$$

Заметим, что в таком случае суммарный объем жидкостей больше объема сосуда. Значит, этот случай не реализуется.
3) Несмешиваемые жидкости. Чтобы кубик утонул, необходимо долить столько воды, чтобы уровень жидкости был на уровне верхней грани кубика.
Условие плавания кубика:

$$\rho_1 g V_3 = mg$$

Откуда объем погруженной части:

$$V_3 = \frac{m}{\rho_1}$$

А значит, глубина погружения равна:

$$h = \frac{V}{a^2} = \frac{m}{\rho_1 a^2}$$

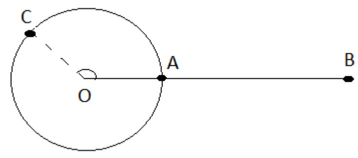
Высота выступающей части:

$$H = a - h = a - \frac{m}{\rho_1 a^2}$$

Тогда необходимый объем воды, с учетом, что кубик занимает часть объема:
$V = SH - a^2 H = (S - a^2)(a - \frac{m}{\rho_1 a^2}) = 175$ см$^3 = 0{,}375$ л

9.2. (5 баллов) Колобок начинает двигаться по окружности радиуса R=10,0 м из точки A со скоростью 0,500 м/с. В тот же момент времени стартует лиса из точки B со скоростью 0,670 м/с.

[2] Успеет ли лиса догнать колобка прежде того момента, когда он достигнет точки C?



Замечание. Расстояние между центром окружности O и точкой B равно L=25,0 м. Угол AOC равен 150 градусов. (*А.Б. Яковлев*)

Ответ: Лиса догонит колобка до точки C.

Решение. 1) Лиса успеет догнать колобка, если ее время движения до точки C будет меньше, чем время движения колобка до этой точки. Лисе выгодно двигаться напрямую от точки B до C. Вычислим это расстояние с помощью теоремы косинусов из треугольника OBC:

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2 - 2OB * OC \cos(\alpha)} = \sqrt{L^2 + R^2 - 2LR\cos(\alpha)},$$

где $\alpha = 150^o$

Тогда время движения лисы:

$$t_1 = \frac{BC}{v_1} = \frac{\sqrt{L^2 + R^2 - 2LR\cos\alpha}}{v_1} \approx 50.8\text{с}.$$

2) Колобок должен пройти путь по дуге AC, длина которого вычисляется как:

$$S = R\alpha,$$

где угол α выражен в радианах:

$$\theta = \frac{\alpha \times \pi}{180^o} = \frac{5\pi}{6}\text{рад}.$$

Тогда время движения колобка:

$$t_2 = \frac{S}{v_2} = \frac{26.2}{0.500} = 52.4\text{с}.$$

6) Так как $t_2 > t_1$, лиса успевает догнать колобка до достижения им точки C.

9.3. (9 баллов) В глубокой полости налиты 2 несмешиваемые жидкости (толщины обоих слоев одинаковы и равны 20,0 м) с показателями преломления 1,50 (нижний слой) и 1,25 (верхний слой). По поверхности верхнего слоя движется маленький катер, с постоянной скоростью 20,0 м/с . Через 1,20 с из точки на дне, лежащей на одной вертикали с точкой старта катера, выпускают узкий луч звука под углом 30,0^o к вертикали.

[3] Через сколько секунд звук догонит катер. Скорость звука в нижнем слое жидкости равна 300,0 м/с?

Замечание. При решении учитывать, что звук подчиняется тем же законам отражения и преломления, что и свет. (*А.Б. Яковлев, А.М. Минарский*)

Ответ: Звук не сможет догнать катер.

Решение. 1) Введем обозначения:

$h = 20.0$ м — толщины слоев жидкости.

$n_1 = 1.50$ — показатель преломления нижней жидкости.

$n_2 = 1.25$ — показатель преломления верхней жидкости.

$v_K = 20.0$ м/с — скорость катера.

$t_0 = 1.20$ с — задержка перед выпуском луча.

1)Вычислим время, за которое звук попадет со дна на поверхность. Его путь делится на два участка - движение в первой и во второй жидкости, в которых он распространяется с разными скоростями. Таким образом:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}$$

где s_1 и s_2 - пути, пройденные звуком в нижней и верхней жидкости со скоростями v_1 и v_2 соответственно

2) По определению показатель преломления в среде

$$n_1 v_1 = n_2 v_2$$

Значит, в верхней жидкости звук распространяется со скоростью:

$$v_2 = \frac{v_1 n_1}{n_2}$$

3) При переходе звука из нижней жидкости в верхнюю меняется направление его распространения согласно закону Снеллиуса:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

где - θ_1,θ_2 - угол падения звука на границу раздела жидкостей и угол преломления при переходе в верхнюю жидкость, соответственно. Из геометрических соображений ясно, что $\theta_1 = 30^o$

Тогда

$$\sin\theta_2 = \sin\theta_1 \frac{n_1}{n_2}$$

4) Из геометрических соображений находим пройденный звуком путь в каждом слое:

$$s_1 = \frac{h}{\cos\theta_1} = \frac{h}{\sqrt{1-(\sin\theta_1)^2}}$$

$$s_2 = \frac{h}{\cos\theta_2} = \frac{h}{\sqrt{1-(\sin\theta_2)^2}} = \frac{h}{\sqrt{1-(\sin\theta_1\frac{n_1}{n_2})^2}}$$

Причем по горизонтали звук проходит расстояние:

$$L = l_1 + l_2 = s_1\sin\theta_1 + s_2\sin\theta_2 = h\sin\theta_1\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\sin\theta_1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\sin\theta_1\frac{n_1}{n_2})^2}}\frac{n_1}{n_2}\right) = 26.6 \text{ м}$$

Тогда звук доберется до поверхности за время:

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{h}{v_1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\sin\theta_1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\sin\theta_1\frac{n_1}{n_2})^2}}\frac{n_1}{n_2}\right) = 0.15\text{с}$$

5) Так как звук начал движение позднее катера, то к моменту, когда звук доберется до поверхности, катер пройдет расстояние

$$l = (t_0 + t)v_K = 27\text{м}$$

6) Таким образом, $l > L$, а значит, звук не сможет догнать катер

9.4. (5 баллов) Настя посещает школьный кружок по физике. На одном из занятий она собрала электрическую цепь из трех одинаковых лампочек с сопротивлением R= 5 Ом. Две лампочки она соединила параллельно, а оставшуюся последовательно с ними.

[4] Определите максимальную мощность, выделившуюся на одной из лампочек, если лампочки подключены к батарее с напряжением 3 В.

Замечание. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. (*А.А. Черенков*)
Ответ: 0,8 Вт.
Решение. 1) Чтобы вычислить мощности, выделяемые на лампочках, найдем ток, который через них протекает. Общее сопротивление лампочек, соединенных паралельно :

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

Эти лампочки последовательно соединены с третьей. Тогда общее сопротивление цепи:

$$R_0 = R_3 + R_{12} = \frac{3}{2}R$$

2) По закону Ома для участка цепи:

$$I = \frac{U}{R_0} = \frac{2U}{3R}$$

3) Ток, протекая по лампочкам, соединенным параллельно, делится пополам в силу симметрии. Таким образом, мощности, выделяемые на этих лампочках:

$$P_1 = P_2 = P_{12} = \left(\frac{I}{2}\right)^2 R = \frac{U^2}{9R}$$

4) Мощность, выделяемая на третьей лампочке:

$$P_3 = I^2 R_3 = \frac{4U^2}{9R} > P_{12}$$

Подставляя численные значения, находим:

$$P_3 = 0{,}8\text{Вт}$$

9.5. (7 баллов) Группе легкомоторных спортивных самолетов поставлена задача одновременно вылетев из пункта A сбросить в пункте B вымпел и вернуться назад. Расстояние от A до B 450 км. В каждом самолете бак вмещает 240 литров топлива, 1 литр которого позволяет пролететь 2,5 км при крейсерской (наиболее экономичной) скорости в 300 км/час.

[5] Какое минимальное количество самолетов должно быть в группе, чтобы выполнив задание все они вернулись в A, если возможна мгновенная перекачка топлива из самолета в самолет?

[6] Какое суммарное количество часов самолеты будут находиться в воздухе?

(*Г.А. Гамов, А.Б. Яковлев*)

Ответ: 3.
Ответ: 6 ч.
Решение. 1) Введем обозначения:
Объем бака: V = 240л
Расход топлива: $\alpha = \frac{1}{2{,}5}$ л/км
Скорость самолетов: v = 300 км/ч
Расстояние от пункта A до B и обратно: S = 900 км
Будем решать задачу итеративно, рассматривая сначала один самолет, потом два и так далее.
2) Пусть летит один самолет. Тогда максимальное расстояние, которое он сможет пролететь:

$$S_0 = \frac{V}{\alpha} = 600\text{км}$$

Таким образом, самолет не долетит $\Delta S = S - S_0 = 300$км , и ему понадобится $\Delta V = \Delta S\alpha = 120$л дополнительного топлива, то есть полбака.
3) Пусть летят два самолета. Ясно, что одному из самолетов необходимо пролететь ΔS, перека-

чать полбака топлива другому самолету и развернуться. Иначе, если он пролетит меньше или больше, чем ΔS, он не сможет передать необходимое количество топлива второму самолету, чтобы тот завершил полет в А. Однако к этому моменту он уже израсходует полбака топлива, а значит, если он отдаст второую половину бака, то сам не сможет вернуться в А.
4) Пусть летят три самолета. Рассмотрим следующую стратегию. Пусть самолеты пролетят $\Delta S/2$, тогда они израсходуют по четверти своего бака. В этот момент один из самолетов перекачивает свое топливо другим самолетам до полного бака. Тогда у него останется ровно четверть бака, и этого достаточно, чтобы вернуться обратно. Дальше оставшиеся самолеты пролетят еще $\Delta S/2$, снова расходуя по четверти бака. Один из самолетов перекачивает свое топливо второму до полного бака. Тогда у него останется ровна половина бака, чего как раз достаточно, чтобы он вернулся обратно в А. У второго же самолета при этом будет полный бак, на котором он долетит оставшийся ему путь.
5) Вычислим суммарное количество часов, которое самолеты будут находиться в воздухе. Суммарное пройденное расстояние:

$$L = 2 * (\Delta S/2 + \Delta S + S/2) = 3\Delta S + S$$

А значит суммарное время в воздухе:

$$T = \frac{L}{v} = \frac{3\Delta S + S}{v} = 6\text{ч}$$

Решения задач для 10 класса

10.1. (8 баллов) Известно, что при взаимодействии 1 моля газа A и 3 молей газа B при температуре T=298,15 K образуется 2 моля вещества C, при этом изменение энтальпии при постоянном давлении в 1 атмосферу равно - 40,32 кДж/моль.

[1] Какая энергия выделится если 1 моль газа A вступит в реакцию с газом B при постоянном объеме и температуре T?

Замечание. Энтальпия по определению равна сумме внутренней энергии и произведения давления на объем H=U+pV. Универсальная газовая постоянная равна 8,31441 Дж/К*моль.

(*И. Пригожин, А.Б. Яковлев*)

Ответ: -35.36 кДж.

Решение. 1) Запишем первое начало термодинамики:

$$\Delta U = A + Q$$

Так как по условию объем постоянный, то работа не совершается:

$$\Delta U = Q$$

2) Запишем выражение для изменения энтальпии:

$$\Delta H = \Delta U + \Delta pV$$

Выразим внутреннюю энергию:

$$\Delta U = Q = \Delta H - \Delta PV$$

3) Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует

$$\Delta pV = \Delta\mu RT = \Delta\mu RT$$

где из условия задачи следует, что

$$\Delta\mu = 2 - 1 + 3 = -2$$

4) Таким образом, окончательное выражение для выделившейся энергии:

$$Q = \Delta H - \Delta\mu RT = -35.36\text{кДж}$$

10.2. (5 баллов) Плоский конденсатор состоит из трех пластин алюминиевой фольги, разделенных двумя слоями кварца толщиной d = 0.20 мм. Крайние пластины соединены между собой.

[2] Какова емкость данного конденсатора? Ответ дать в микрофарадах.

Замечание. Площади пластин s = 10 см^2, диэлектрическая проницаемость кварца $\varepsilon = 4.3$.

(*А.А. Черенков*)

Ответ: 0,00038 мкФ.

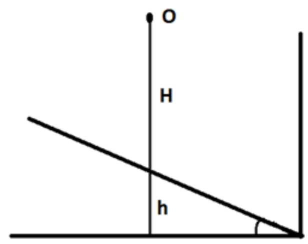
Решение. 1) Сообщим внешним пластинам заряд q. Тогда на средней пластине индуцируется заряд q соответствующего знака с каждой стороны. Таким образом, конденсатор можно рассматривать как два одинаковых конденсатора, соединенных параллельно. Вычислим емкость этих конденсаторов:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

Тогда общая емкость двух конденсаторов, соединенных последовательно:

$$C_0 = 2\text{C} = 2\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = 0{,}00038\text{мкФ}$$

10.3. (9 баллов) Мячик радиусом 5 мм начинает падать из точки O без начальной скорости в области, ограниченной двумя абсолютно упругими плоскостями (см. рисунок).



[3] При каком отношении H/h мяч сможет вернуться в начальную точку?

Замечание. Расстояние точки O от вертикальной стенки l больше радиуса мяча. Ускорение свободного падения принять равным 10,0 м/с^2. Угол наклона плоскости равен α . *(А.Б. Яковлев)*

Ответ: $\frac{H}{h} = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha)}{\sin(4\alpha)}, \quad \alpha \in 0^o, 45^o.$

Решение. 1)Из закона сохранения полной механической энергии найдем скорость шарика перед ударом о наклонную плоскость:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH$$

откуда

$$v_0^2 = 2gH$$

2) Пусть после первого удара о плоскость мячик отскочит под углом β к горизонту. Запишем уравнение движения мячика вдоль горизонтального направления:

$$x(t) = v_0 \cos(\beta) t$$

Пусть угол наклонной плоскости равен α. Тогда горизонтальное расстояние, которое должен пройти мячик до соударения со второй стеной:

$$l = h \operatorname{ctg}(\alpha)$$

Найдем также связь углов α и β. При упругом ударе о преграду модуль скорости не меняется, меняется только ее направление. Из геометрических соображений находим, что мячик отразится от преграды под углом

$$\beta = 90 - 2\alpha$$

Найдем момент времени, когда мячик ударится о вторую стенку:

$$l = x(t_0)$$
$$l = v_0 \cos(\beta) t_0$$

откуда

$$t_0 = \frac{l}{v_0 \cos(\beta)}$$

3) Мяч сможет вернуться в начальную точку, если удар о вертикальную стену произойдет перпендикулярно ее поверхности. Это значит, что его скорость будет направлена горизонтально в момент времени t_0. Таким образом, вертикальная составляющая скорости будет равняться нулю:

$$0 = v_y(t_0) = v_0 \sin(\beta) - gt_0$$

откуда

$$t_0 = \frac{v_0 \sin(\beta)}{g}$$

4) Приравняем два выражения для t_0

$$\frac{v_0 \sin(\beta)}{g} = \frac{l}{v_0 \cos(\beta)}$$

откуда

$$v_0^2 \sin(\beta)\cos(\beta) = lg$$

Подставим выражения для скорости и горизонтального расстояния:

$$2gH \sin(\beta)\cos(\beta) = h \operatorname{ctg}(\alpha) g$$

Выразим отношение высот:

$$\frac{H}{h} = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha)}{\sin(2\beta)} = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha)}{\sin(2*(90^o - 2\alpha))} = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha)}{\sin(4\alpha)}$$

5) Стоит заметить, что найденное решение справедливо, когда при отскоке от первой плоскости вертикальная составляющая скорости шарика положительна, то есть

$$\sin\beta > 0$$

В противном же случае, когда

$$\sin\beta \leqslant 0$$

мячик отскочит вниз и не сможет удариться перпендикулярно о вертикальную плоскость. Это так же видно из формулы для времени t_0, которое становится отрицательным при $\sin\beta < 0$. Таким образом, имеем:

$$\sin\beta > 0$$

$$\sin(90^o - 2\alpha) = \cos(2\alpha) > 0$$

Значит

$$2\alpha \in (-90^o; 90^o)$$

, откуда с учетом того, что угол должен быть положительным, получаем окончательное ограничение на угол α:

$$\alpha \in (0^o, 45^o)$$

10.4. (8 баллов) Петя решил повторить кругосветный полет Федора Конюхова на воздушном шаре объемом V= 1000,0 м^3 и массой m= 1000,0 кг. Необходимая температура газа для полета шара равна T= 330,0^o K. На расстоянии 5,000 км от берега над Атлантическим океаном Петя обнаружил, что температура внутри шара понизилась до T_1= 290,0^o K и топлива в горелках достаточно только для поддержания этой температуры.

[4] Сколько потребуется сбросить балласта, чтобы шар смог долететь до берега, если шар находится на высоте h= 300,0 м и движется со скоростью v= 15,00 км/ч.

Замечание. Предполагать, что масса воздуха внутри шара не меняется, а его плотность равна 1,275 кг/м^3. Ускорение свободного падения считать равным 9.80000 м/с^2, а плотность окружающего воздуха независящей от высоты. *(А.Б. Яковлев)*

Ответ: 154,6 кг.

Решение. 1) Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газа в шаре при температурах T и T_1

$$\begin{cases} pV = \mu RT \\ p_1V_1 = \mu RT_1 \end{cases}$$

откуда получим объем шара, когда температура газа понизилась до T_1, учтя, что в обоих случаях давление равно внешнему атмосферному давлению :

$$V_1 = V\frac{T_1}{T}$$

2) Запишем второй Закон Ньютона для шара, когда температура газа равнялась Т. По условию, это есть необходимая температура для полета шара, а значит сила Архимеда уравновешивается силой тяжести шара с газом. Пусть суммарная масса шара и газа в нем равна М, тогда:

$$F_{arh} = Mg$$

Пусть плотность воздуха есть ρ, тогда

$$\rho gV = Mg$$

откуда

$$M = \rho V$$

.

3) Когда температура газа понизилась, объем шара уменьшился, а следовательно, выталкивающая сила так же уменьшилась, поэтому шар приобретает ускорение, направленное вертикально вниз. Пусть при этом с шара сбросили балласт Δm достаточный для приобретения шаром ускорения, с которым он сможет добраться до берега. При этом теперь масса шара и газа в нем $M_1 = M - \Delta m$. Таким образом, запишем второй закон Ньютона:

$$M_1g - F_{arh1} = M_1a$$

откуда

$$M_1g - \rho gV_1 = M_1a$$

, значит

$$a = g\left(1 - \frac{\rho V_1}{M_1}\right) = g\left(1 - \frac{\rho V_1}{M - \Delta m}\right) = g\left(1 - \frac{\rho V_1}{\rho V - \Delta m}\right)$$

4) Шару необходимо пролететь расстояние $l = 5{,}000$ км в горизонтальном направлении со скоростью v. Тогда время, за которое шар пролетит это расстояние:

$$T = \frac{l}{v}$$

За это же время, шар должен пройти расстояние h по вертикали с ускорением a. Таким образом

$$h = y(T) = \frac{aT^2}{2} = \frac{al^2}{2v^2}$$

таким образом:

$$a = \frac{2v^2h}{l^2} = g\left(1 - \frac{\rho V_1}{\rho V - \Delta m}\right)$$

Откуда после несложных преобразований получаем

$$\Delta m = \rho V\left(1 - \frac{T_1}{T(1 - \frac{2hv^2}{l^2 g})}\right) = 154{,}6\text{кг}$$

10.5. (5 баллов) В вершинах правильного шестиугольника с длиной стороны в 10,0 см находится по заряду q=0,000100 Кл.

[5] Какой заряд нужно поместить в центр шестиугольника, чтобы система находилась в равновесии?

[6] Будет ли оно устойчивым?

(*А.Б. Яковлев*)

Ответ: 0,000183Кл.

Ответ: Неустойчивое.

Решение. 1) В силу центральной симметрии системы зарядов достаточно рассмотреть равновесие лишь одного из зарядов в вершинах шестиугольника. Для этого пронумеруем остальные заряды. Пусть два ближайших заряда в вершинах будут с номерами 1 и 2, заряд в противоположной вершине с номером 5, и два оставшихся с номерами 3 и 4, а заряд Q по центру с номером 6. Все так же из симметрии системы следует, что результирующая сила F_{12} со стороны зарядов 1 и 2 будет направлена вдоль диагонали, на которой расположен рассматриваемый заряд, точно так же как и результирующая сила F_{34} со стороны зарядов 3 и 4. Силы со стороны зарядов 5 и 6 так же направлены вдоль этой диагонали, так как все три заряда на ней расположены.

2) Вычислим расстояния между рассматриваемым зарядом и остальными. Очевидно, расстояния до зарядов 1,2, 6 равны стороне a шестиугольника, а до заряда 5 - $2a$. Расстояния же до зарядов 3 и 4 равны малой диагонали шестиугольника, которая равна $a\sqrt{3}$.

3) Начнем вычислять силы по закону Кулона. Сила со стороны зарядов 1 и 2:

$$|\vec{F_{12}}| = |\vec{F_1} + \vec{F_2}| = |\vec{F_1}| = \frac{kq^2}{a^2}$$

Сила со стороны зарядов 3 и 4:

$$|\vec{F_{34}}| = |\vec{F_3} + \vec{F_4}| = 2|\vec{F_3}|\cos(30^o) = 2\frac{kq^2}{(a\sqrt{3})^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{kq^2}{\sqrt{3}a^2}$$

Силы со стороны зарядов 5 и 6 :

$$|\vec{F_5}| = \frac{kq^2}{(2a)^2} = \frac{kq^2}{4a^2}, \quad |\vec{F_6}| = \frac{kqQ}{a^2}$$

4)Ясно, что силы $\vec{F_{12}}$,$\vec{F_{34}}$,$\vec{F_5}$ направлены в одну сторону, так как являются отталкивающими. Таким образом, запишем условие равновесия рассматриваемого заряда в проекции на диагональ шестиугольника:

$$F_{12} + F_{34} + F_5 + F_6 = 0$$

Подставим выражения для сил:

$$\frac{kq^2}{a^2} + \frac{kq^2}{\sqrt{3}a^2} + \frac{kq^2}{4a^2} + \frac{kqQ}{a^2} = 0$$

Откуда получаем:

$$Q = -\frac{15 + 4\sqrt{3}}{12}q = -0{,}000183\text{Кл}$$

Решения задач для 11 класса

11.1. (9 баллов) Тренер поставил перед Иваном задачу так подбивать ракеткой шарик для настольного тенниса, чтобы он все время подскакивал на одинаковую высоту в 20 см.

[1] Найдите амплитуду и частоту движения ракетки, учитывая, что шарик теряет между столкновениями в результате трения о воздух 10% своей скорости.

Замечание. Массы шарика и ракетки равны 2,7 и 200 грамм соответственно, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2, а соударения считать абсолютно упругими. Также для простоты считать, что сила трения все время движения шарика постоянна.

(*А.Б. Яковлев, А.А. Черенков*)

Ответ: 16 ; 0.0067.

Решение. 1) Пусть при отскоке от ракетки шарик имеет скорость v_0, которой достаточно, чтобы шарик подлетел на требуемую высоту h=20см. По условию, между соударениями шарик теряет 10% своей скорости. Таким образом, скорость шарика перед повторным соударением:

$$v_1 = \alpha v_0$$

где $\alpha = 0{,}9$

2) Рассмотрим движение шарика между двумя последовательными соударениями с ракеткой. По теореме об изменении кинетической энергии потеря энергии шарика связана с работой силы трения F:

$$2Fh = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}(1-\alpha^2)$$

Откуда находим

$$F = \frac{mv_0^2}{4h}(1-\alpha^2)$$

3) Рассмотрим движение шарика вниз из верхней точки его траектории. По закону сохранения энергии потенциальная энергия переходит в кинетическую и частично растрачивается на работу силы трения:

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2} + Fh$$

Подставим выражение для силы трения

$$mgh = \frac{mv_0^2\alpha^2}{2} + \frac{mv_0^2}{4}(1-\alpha^2)$$

Откуда

$$v_0 = 2\sqrt{\frac{gh}{1+\alpha^2}}$$

Тогда выражение для силы трения приобретает вид:

$$F = mg\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

4) Найдем теперь скорость ракетки перед соударением с шариком. Так как масса ракетки много больше массы шарика, можно рассматривать их удар, как удар об абсолютно тяжелую преграду. По условию соударение абсолютно упругое, а значит, в системе отсчета, жестко связанной с

ракеткой, скорости шарика до и после соударения равны:

$$v_1' = v_0'$$

Тогда в лабораторной системе отсчета имеем:

$$v_1 + V = v_0 - V$$

где V - скорость ракетки
Таким образом

$$V = \frac{v_0 - v_1}{2} = v_0 \frac{1-\alpha}{2} = \sqrt{\frac{gh}{1+\alpha^2}}(1-\alpha)$$

5) Период движения ракетки есть полное время движения шарика между соударениями. Вычислим это время. Для этого рассмотрим движение шарика от ракетки до верхней точки траектории. По второму закону Ньютона:

$$mg + F = ma_1$$

откуда

$$a_1 = g + F/m = g\left(1 + \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right) = g\frac{2}{1+\alpha^2}$$

Время движения найдем из условия, что в верхней точке траектории скорость шарика равна нулю:

$$0 = v_0 - a_1 t_1$$

откуда

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \sqrt{\frac{h}{g}(1+\alpha^2)}$$

Аналогично рассмотрим движение шарика из верхней точки траектории до ракетки. По второму закону Ньютона:

$$mg - F = ma_2$$

откуда

$$a_2 = g - F/m = g\left(1 - \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right) = g\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

Время движения найдем из условия, что в нижней точке траектории скорость шарика равна v_1:

$$v_1 = a_2 t_2$$

откуда

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{h}{g}(1-\alpha^2)}$$

Таким образом, полное время движения шарика

$$T = t_1 + t_2 = (1 + \frac{1}{\alpha})\sqrt{\frac{h}{g}(1+\alpha^2)}$$

5) Зная период движения ракетки можно вычислить частоту, с которой она двигается:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\alpha}{1+\alpha}\sqrt{\frac{g}{h(1+\alpha^2)}} = 15{,}6\text{рад/с}$$

Амплитуду найдем из выражения для максимальной скорости:

$$V = A\omega$$

откуда

$$A = \frac{V}{\omega} = \frac{(1-\alpha)(\alpha+1)}{2\pi\alpha}h = 0.0067\text{м}$$

Так как минимальное количество значащих цифр в условии равно 2, округляем.

11.2. (11 баллов) Для предотвращения наводнения на берегу реки на высоте 1 метра положены бетонные блоки в виде правильных треугольных призм высотой 4 метра. Сторона основания блоков равна 1.5м. Определите при какой высоте воды один такой блок

[2] может быть опрокинут,

[3] может быть сдвинут, если коэффициент трения бетона о землю равен 0,30.

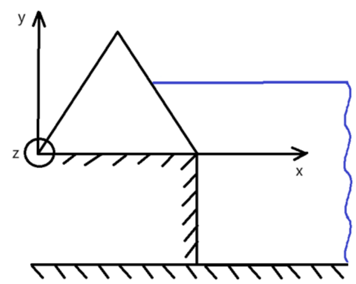
Замечание. Плотность бетона и воды считать равными $2{,}3 * 10^3$ кг/м^3 и $1{,}0 * 10^3$ кг/м^3, соответственно. *(А.Б. Яковлев)*

Ответ: Вода не сможет опрокинуть блок.

Ответ: 2.3 м.

Решение. 1)Введем прямоугольную систему координат как на картинке, с началом координат в вершине основания призмы. Блок будет опрокинут, если момент, создаваемый силой давления воды, будет больше момента силы тяжести относительно oz.

Пусть уровень воды составляет h метров над берегом. Вычислим проекции силы давления воды на грань блока. Так как вдоль направления z распределение давления не меняется, достаточно решить плоскую задачу о давлении слоя жидкости высоты h на ребро сечения и умножить полученный результат на высоту призмы l. Таким образом, элементарная сила df, действующая на элемент ребра da:



$$df = \rho g(h-y)da$$

где ρ - плотность воды Из геометрических соображений ясно, что

$$\sin\alpha da = dy$$

где $\alpha = 60^o$ Таким образом:

$$df = \frac{\rho g(h-y)}{\sin\alpha}dy$$

$$f = \int_0^h \frac{\rho g(h-y)}{\sin\alpha}dy = \frac{\rho g h^2}{2\sin\alpha}$$

А значит сила давления на всю грань:

$$F = lf = \frac{\rho g l h^2}{2\sin\alpha}$$

Так как сила давления направлена перпендикулярно ребру, то:

$$\begin{cases} F_x = F\sin\alpha = \frac{\rho g l h^2}{2} \\ F_y = F\cos\alpha = \frac{\rho g l h^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha \end{cases}$$

Аналогично:

$$\begin{cases} df_x = df\sin\alpha = \rho g(h-y)dy \\ df_y = df\cos\alpha = \rho g(h-y)\operatorname{ctg}\alpha dy \end{cases}$$

2) Вычислим моменты сил F_x,F_y относительно оси oz. Рассуждая аналогично первому пункту, получаем:

$$M_x = l * \int_0^h y df_x = l\rho g * \int_0^h (hy - y^2)dy = \frac{l\rho g}{6}h^3$$

$$M_y = l * \int_0^h (a - y\operatorname{ctg}\alpha)df_y = l\rho g * \operatorname{ctg}\alpha * \int_0^h (a - y\operatorname{ctg}\alpha)(h-y)dy = l\rho g\operatorname{ctg}\alpha\frac{h^2}{2}(a - \frac{h}{3}\operatorname{ctg}\alpha)$$

где a - сторона основания призмы

3) Сила тяжести бетонного блока вычисляется как:

$$mg = \rho_1 V g = \rho_1 l S g = \rho_1 a^2 l g\frac{\sqrt{3}}{4}$$

где ρ_1 - плотность бетона, $S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ - площадь основания призмы

Необходимо также узнать плечо силы тяжести относительно оси oz. Для этого определим положение центра тяжести блока. Из соображений симметрии ясно, что он совпадает с центром тяжести сечения призмы, параллельного ее основаниям и равноудаленного от них. То есть центр тяжести - точка пересечения медиан данного сечения. Тогда плечо силы тяжести есть половина стороны основания призмы. Значит, момент силы тяжести:

$$M_0 = mg\frac{a}{2}$$

4) Сила F_x стремится опрокинуть блок, в то время как сила тяжести и сила F_y этому препятствуют. Введем в рассмотрение функцию результирующего момента этих сил

$$M(h) = M_x - M_y - M_0 = l\rho g(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)\frac{h^3}{6} - l\rho g a\operatorname{ctg}\alpha\frac{h^2}{2} - mg\frac{a}{2}$$

Если при каком-то значении h результирующий момент будет положительным, это будет значить, что блок опрокинется. Очевидно, при h =0 момент отрицательный. Исследуем дальше функцию момента. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию:

$$M_1(h) = \frac{2M(h)}{l\rho g} = (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)\frac{h^3}{3} - \operatorname{ctg}\alpha * ah^2 - \frac{ma}{\rho l}$$

Так как высота воды не больше, чем высота основания блока, то $h \in \left[0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right]$. Поэтому мы исследуем $M_1(h)$ на данном отрезке. Вычислим производную:

$$\frac{dM_1}{dh} = \left((1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)h - 2a\operatorname{ctg}\alpha\right)h$$

Производная является квадратичной функцией, график парабола, ветви которой направлены вверх. Корни этой параболы:

$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 2a\operatorname{ctg}\alpha\sin^2\alpha = a\sin(2\alpha) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Причем

$$\frac{dM_1}{dh} < 0, h \in \left[0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right]$$

то есть на данном отрезке момент все время убывает. Но так как при h = 0 момент был отрицательный, то и на всем этом отрезке он останется отрицательным. Таким образом, вода никак не сможет опрокинуть блок.
5) Чтобы столб воды смог сдвинуть блок, необходимо, чтобы сила F_x превзошла силу трения. Таким образом, запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$F_y + mg = N$$

где N - сила реакции опоры. Вычислим силу трения:

$$F_f = \mu N = \mu(F_y + mg)$$

Таким образом, необходимо:

$$F_x > F_f$$

$$\frac{\rho g l h^2}{2} > \mu \rho_1 \alpha^2 l g \frac{\sqrt{3}}{4} g + \mu \frac{\rho g l h^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha$$

Откуда

$$h^2 > \frac{\sqrt{3}\mu\rho_1 a^2}{2\rho(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)}$$

А значит

$$h > 1.3\text{м}$$

Учтем, что мы вели отсчет от берега, тогда реальный уровень воды:

$$H = 1 + h > 2.3\text{м}$$

Но этот уровень выше вершины блока, поэтому вода раньше начнет переливаться через блок и сдвинуть его не сможет.

11.3. (8 баллов) Петр, масса которого m= 70 кг, планирует участвовать в велогонке с горным этапом, где максимальный угол наклона шоссе достигает 10 градусов. Гоночный велосипед Петра имеет следующие параметры: масса - 12 кг, внешний диаметр колес - 700 мм, радиус окружности движения педалей - 180 мм, минимальная передняя и максимальная задняя звездочки, на которые крепится цепь, имеют соответственно 40 и 25 зубьев.

[4] Определите сможет ли он двигаться с постоянной скоростью на участке максимального наклона, учитывая, что Петр действует на педали со средней силой 0,85* mg, направленной вертикально вниз.

Замечание. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным 9,8 м/с^2.

(А.Б. Яковлев)

Ответ: Петр не сможет двигаться с постоянной скоростью.
Решение. 1)Петр сможет двигаться с постоянной скоростью на участке максимального наклона, если совершаемая им работа будет больше работы силы тяжести. Пусть Петр совершает пол-оборота педалями. Тогда совершаемая им работа:
$A_1 = F * 2r = 2\beta gmr = 210$ Дж
где $\beta = 0{,}85$, r - радиус окружности движения педалей.
2) Вычислим, сколько оборотов при этом сделает заднее колесо:

$$N = \frac{1}{2}\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2}i$$

где $i = \frac{40}{25}$ - передаточное отношение звёздочек
При этом велосипед пройдет путь вдоль наклонного участка:

$$S = 2\pi NR = \pi iR$$

А вертикальное перемещение составит:

$$h = S\sin\alpha = \pi iR\sin\alpha$$

3) Наконец, вычислим работу силы тяжести:
$A_2 = (m+M)gh = (m+M)g\pi iR\sin\alpha =$ 245 Дж
Так как $A_2 > A_1$, то Петр не сможет двигаться с постоянной скоростью

11.4. (5 баллов) В школьной лаборатории изучают электростатику. На одной из установок учитель проводит эксперимент. Для этого он взял плоский конденсатор, заземлил одну из пластин и приложил напряжение U = 220 В. Затем в воздушный зазор между обкладками учитель помещает плоскую незаряженную металлическую пластину на расстоянии l =2.00 см от нижней заземленной пластины.

[5] Каков будет потенциал внутренней пластины?

[6] Какова будет напряженность поля с обеих сторон (сверху и снизу) от нее, если расстояние между обкладками конденсатора равно d = 3.00см? *(А.А. Черенков)*

Ответ: 147 В.
Ответ: 7,33 кВ/м.
Решение. 1) При введении незаряженной пластины на ее сторонах индуцируются заряды, противоположные по знаку и равные друг другу и зарядам на пластинах конденсатора. Поэтому напряженность поля E внутри конденсатора не изменится. Получаем:

$$E = \frac{U}{d} = 7{,}33\text{кВ/м}$$

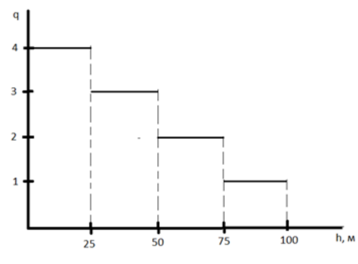
2) Обозначим искомый потенциал через ϕ. Тогда

$$E = \frac{U}{d} = \frac{\phi}{l}$$

Откуда находим:

$$\phi = \frac{Ul}{d} = 147B$$

11.5. (7 балла) Ионосфера около планеты Железяка на высотах от 0 до 100 метров устроена таким образом, что электрический заряд тела изменяется скачкообразно как показано на рисунке.



[7] Определите возможно ли колебательное движение для тела массой m= 4 грамма, учитывая, что в указанной области высот напряженность направленного вверх электрического поля постоянна и равна 10000 В/м, а напряженность гравитационного поля также постоянна и равна 5 м/с^2.

Замечание. Заряд тела указан в микроКулонах. *(А.Б. Яковлев)*
Ответ: Тело может пребывать в колебательном движении..
Решение. 1) Заметим, что силы, действующие на тело, потенциальны. Тогда колебательное движение тела возможно, если оно попадёт в потенциальную яму. Потенциальная энергия тела складывается из гравитационной и электрической составляющих:

$$\Pi(h) = mgh - Eq(h)h = (mg - Eq(h))h.$$

То есть потенциальная энергия тела является кусочно линейной функцией высоты, так как заряд меняется скачкообразно с высотой. Теперь вычислим $(mg - Eq(h))$ для каждого участка:
При $0 \leqslant h \leqslant 25$ м:

$$mg - Eq = (4 \times 10^{-3} * 5) - (10000 \times 4 \times 10^{-6}) = -20 \times 10^{-3}\text{Н}.$$

Потенциальная энергия убывает.
При $25 \leqslant h \leqslant 50$ м:

$$mg - Eq = (4 \times 10^{-3} * 5) - (10000 \times 3 \times 10^{-6}) = -10 \times 10^{-3}\text{Н}.$$

Потенциальная энергия также убывает.
При $50 \leqslant h \leqslant 75$ м:

$$mg - Eq = (4 \times 10^{-3} * 5) - (10000 \times 2 \times 10^{-6}) = 0\text{Н}.$$

Потенциальная энергия остаётся постоянной.
При $75 \leqslant h \leqslant 100$ м:

$$mg - Eq = (4 \times 10^{-3} * 5) - (10000 \times 1 \times 10^{-6}) = 10 \times 10^{-3}\text{Н}.$$

Потенциальная энергия возрастает.
2) Таким образом, при $h \in [0; 50]$ потенциальная энергия убывает, при $h \in [50; 75]$ остаётся постоянной, а при дальнейшем росте высоты $h \in [75; 100]$ потенциальная энергия возрастает. Это означает, что на интервале $h \in [50; 75]$ тело попадает в потенциальную яму, и колебательное движение возможно.