Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 5 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

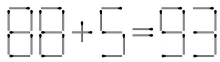
1. Можно ли в прямоугольнике 2×4 разместить однозначные числа без повторов так, чтобы сумма любых двух чисел, соседних по стороне, являлась простым числом?
Примечание. Напомним, что простое число — это целое число, большее 1, которое делится только на единицу и само на себя. (*М. В. Карлукова*)

Ответ: да — например, так:

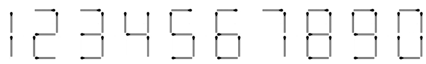
7	4	3	8
6	1	2	5

Критерии. Просто пример — 7 баллов (число 0 тоже можно использовать). Ответ «да» с неверным примером или без примера — 0 баллов.

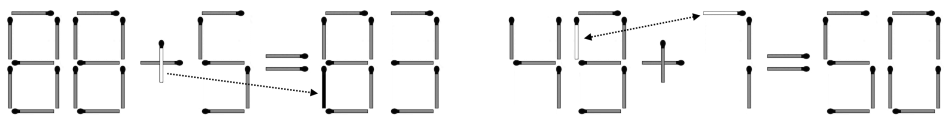
2. Первоклассник Паша выложил из спичек пример $88 + 5 = 93$ (см. справа). Учитель поставил ему пятёрку.
(a) Помогите первокласснику Андрею тоже получить пятёрку, переложив в Пашином примере ровно одну спичку так, чтобы равенство осталось верным.



(b) Придумайте свой верный пример из 5 различных цифр, выложенных спичками, так что в нём можно переложить одну спичку от одной цифры к другой, чтобы снова получилось верное равенство (иными словами, знаки арифметических операций изменять нельзя, а знак «=» нельзя перечёркивать). Образцы всех цифр представлены справа. (*П. Д. Муленко*)

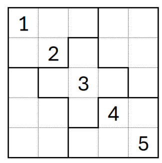


Ответ: a) $88 - 5 = 83$; b) например, $43 + 7 = 50$ превращается в $49 + 1 = 50$.



Критерии. Только пункт a — 2 балла; только пункт b — 5 баллов.

3. Сколько решений имеет фигурное судоку, изображённое справа? Не забудьте доказать, что никаких других решений нет.
Примечание. По правилам фигурных судоку 5×5 во всех строках, столбцах и выделенных блоках должны встречаться все цифры от 1 до 5. (*М. В. Карлукова*)



Ответ: 2 решения.

Решение. В центральном кресте цифра 4 может стоять или в левой, или в верхней пустых клетках. Если поставить 4 в верхнюю клетку, то всё остальное судоку решается однозначно (см. рис. слева, очередность выставления цифр указана в правом нижнем углу клеток).

Если же поставить 4 в левую клетку, то после выставления всех четвёрок однозначно восстановить следующие цифры не получается. Поэтому рассмотрим два случая, какая цифра может стоять в верхней клетке центрального креста (1 или 5). Если там стоит 1, то остальное судоку решается однозначно (см. центральный рис.); если же там стоит 5, то тем или иным путём получается противоречие (пример на рисунке справа — в правой нижней фигуре некуда поставить 1).

1	4 $_{2}$	5 $_{6}$	3 $_{19}$	2 $_{20}$
3 $_{5}$	2	4 $_{1}$	5 $_{7}$	1 $_{8}$
2 $_{11}$	5 $_{9}$	3	1 $_{12}$	4 $_{3}$
5 $_{10}$	1 $_{15}$	2 $_{14}$	4	3 $_{18}$
4 $_{4}$	3 $_{16}$	1 $_{13}$	2 $_{17}$	5

1	5 $_{15}$	4 $_{3}$	3 $_{20}$	2 $_{12}$
3 $_{16}$	2	1 $_{5}$	5 $_{19}$	4 $_{4}$
5 $_{14}$	4 $_{1}$	3	2 $_{13}$	1 $_{6}$
2 $_{17}$	1 $_{8}$	5 $_{9}$	4	3 $_{11}$
4 $_{2}$	3 $_{18}$	2 $_{10}$	1 $_{7}$	5

1	5 $_{8}$	4 $_{3}$		
3 $_{7}$	2	5 $_{5}$	1 $_{6}$	4 $_{4}$
	4 $_{1}$	3	2 $_{9}$	
		1 $_{10}$	4	1
4 $_{2}$		1	1	5

Критерии. Указаны оба верных решения без обоснования, что других решений нет – 2 балла.

4. Маша и Костя по очереди ставят в клетки шахматной доски знаки + и − (начинает Костя) по следующим правилам:
   - каждым ходом игрок выбирает произвольную свободную клетку и ставит в неё один знак по своему выбору;
   - если после хода игрока в клетку некоторого цвета оказалось, что в клетках этого цвета стало поровну плюсов и минусов, то игрок автоматически считается проигравшим;
   - после заполнения доски отдельно для чёрных и белых клеток вычисляется, каких знаков оказалось больше: если в одном цвете больше плюсов, а в другом больше минусов, то побеждает Маша, иначе побеждает Костя.

   Кто может обеспечить себе победу и как для этого необходимо действовать? (*П. Д. Муленко*)

   Ответ: Маша может обеспечить себе победу, первым ходом поставив противоположный Костиному знак в клетку противоположного цвета.

   Решение. Допустим, Костя первым ходом поставил + в чёрную клетку. Это означает, что в чёрных клетках всегда будет больше плюсов, чем минусов (чтобы это изменить, кому-то из игроков придётся сперва уравнять количество знаков, что автоматически считается поражением). Таким образом, Маше достаточно будет первым своим ходом поставить − в белую клетку, чтобы в белом цвете было больше минусов. Для остальных трёх вариантов хода Кости (+ в белую, − в чёрную, − в белую) применимо такое же рассуждение.

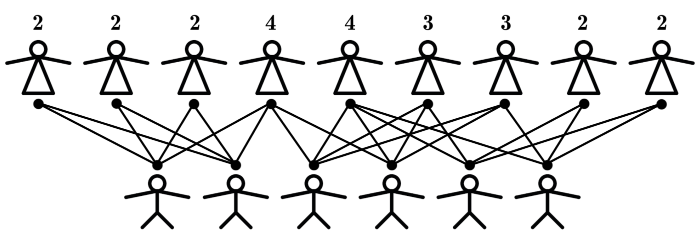
   Критерии. Только верный ответ (Маша) — 0 баллов. Верно указан первый Машин ход, но не объяснено, почему он приводит к победе — 2 балла. За замечание, что результат для каждого из цветов определяется первым поставленным туда знаком, ставится 2 балла.

5. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.
   - Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
   - Среди них есть пять девочек, каждая из которых знакома ровно с двумя мальчиками.
   - Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с тремя мальчиками каждая.
   - Каждый мальчик знаком с четырьмя девочками.

   Какое наименьшее количество девочек могли прийти на олимпиаду? Не забудьте доказать, что это действительно минимальное количество. (*Л. С. Корешкова*)

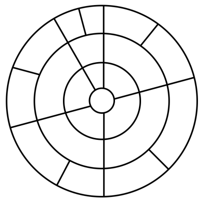
   Ответ: 9 девочек.

   Решение. Если x — количество девочек с тремя знакомствами, то общее число знакомств равно $2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 3x = 18 + 3x$. Раз каждый мальчик знаком с 4 девочками, то количество знакомств должно делиться на 4. Минимальное x, при которм это выполняется, равно 2. Итого количество девочек не меньше $2 + 5 + 2 = 9$. Пример для 9 девочек показан ниже.



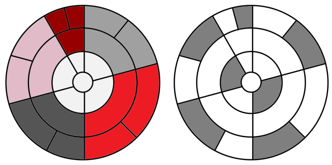
Критерии. Только пример — 2 балла. Только оценка — 3 балла. Только ответ (9) — 0 баллов.

6. Офис компании расположен на отдельном этаже бизнес-центра (см. рис.). В каждой комнате находится отдел, которым руководит менеджер. Директор компании решил повысить некоторых руководителей отделов до главных менеджеров. Однако нельзя допустить, чтобы двумя соседними отделами руководили главные менеджеры (иначе они будут спорить через стенку, кто из них главнее). Какое максимальное количество менеджеров можно повысить в должности? Не забудьте объяснить, почему оно действительно максимальное. (*И. М. Туманова*)



Ответ: 7 менеджеров.

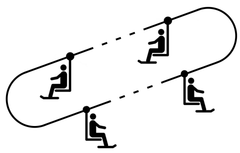
Решение. Разделим офис на 6 зон (показаны разными цветами на картинке слева). В центральной зоне не более двух главных менеджеров (если повысили центрального, то остальных нельзя повысить; если нет, то среди 5 расположенных вокруг него можно выбрать максимум двоих). А в каждой из остальных 5 зон не более одного главного менеджера. Итого можно повысить не более 7 менеджеров.



Пример, как повысить семерых, показан справа.

Критерии. Только ответ (7) — 0 баллов. Ответ с примером, но без оценки — 2 балла. Если в оценке не разобрана часть случаев (например, рассмотрены только случаи, когда менеджер в центральной комнате не повышен) — не более 5 баллов. «Жадные» рассуждения (например, «чтобы результат был максимальным, нужно, чтобы во внешнем кольце было как можно больше главных менеджеров») некорректны.

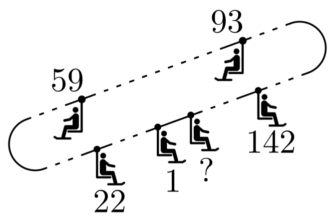
7. Кресла на кресельном подъёмнике Розы Хутор пронумерованы последовательно: 1, 2, 3 и т. д. Расстояния между каждыми двумя соседними сиденьями одинаковы. Во время грозы кресельный подъёмник остановился, и в этот момент кресло 22 находилось на одной высоте с креслом 59, а кресло 93 — на той же высоте, что и кресло 142. Определите количество кресел на кресельном подъёмнике. (*Л. С. Корешкова*)



Ответ: 154.

Решение.

Заметим, что кресла 22 и 142 должны находиться с одной стороны, а 59 и 93 с другой (если бы с одной стороны находились 22 и 93, а с другой 59 и 142, то порядок следования кресел нарушался бы). Значит, между 142 и 22 столько же кресел, сколько между 59 и 93, то есть $93-59-1=33$ кресла. Из них 21 кресло имеют номера от 1 до 21, значит, у 12 кресел номера больше 142. Получается, всего кресел $142+12=154$.



Критерии. Дан верный ответ (154) без каких-либо обоснований — 1 балл.
Решение верное, но то, что 22 и 142 с одной стороны, никак не обосновано (а просто сразу нарисовано без комментариев) — штраф 1 балл. Ошибки в ±1 при подсчёте расстояний между креслами, влияющие на ответ — штраф в 2 балла. Арифметические ошибки — штраф в 1 балл.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 6 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Можно ли в прямоугольнике 2×4 разместить все числа от 1 до 8 так, чтобы сумма любых двух чисел, соседних по стороне, являлась простым числом?
Примечание. Напомним, что простое число — это целое число, большее 1, которое делится только на единицу и само на себя. (*М. В. Карлукова*)

Ответ: да — например, так:

7	4	3	8
6	1	2	5

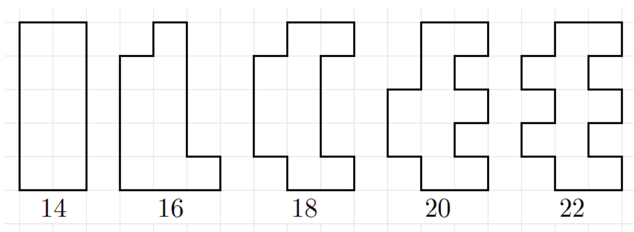
Критерии. Просто пример — 7 баллов. Ответ «да» с неверным примером или без примера — 0 баллов. Число 0, в отличие от задачи для 5 класса, использовать нельзя.

2. На самостоятельной работе учитель выдал каждому из 10 учеников клетчатый листок с нарисованным на нм многоугольником, составленным из 10 клеток (разным детям могли достаться разные многоугольники), и попросил вычислить периметр этого многоугольника. Оказалось, что у всех учеников разные ответы от 13 до 22. Какое наименьшее количество неправильных ответов среди них? (*С. П. Павлов*)

Ответ: 5 (все нечётные).

Решение. Докажем, что периметр всегда чётный. Действительно, обведём фигуру по периметру, вернувшись в исходную точку. Поскольку рисование завершится в той же вершине, где и начиналось, то число единичных отрезков, проведённых нами вверх, равно числу единичных отрезков, проведённых вниз. Значит, суммарное число вертикальных отрезков чётно. С горизонтальными отрезками аналогично. Итак, у такого многоугольника периметр чётный, поэтому все нечётные ответы неверные.

Для чётных периметров строятся примеры:



Критерии. 1 балл — ответ с указанием, что все чётные результаты получить можно, а нечётные нельзя (или с прямым перечислением, какие можно, а какие нельзя).
Ещё 3 балла — примеры (5 верных примеров — 3 балла, 4 примера — 2 балла, 3 примера — 1 балл, меньше — 0).
Ещё 3 балла — доказательство, что нечётных периметров не бывает.

3. Костя и Маша по очереди ставят в клетки доски 8×8 знаки $+$ и $-$ (начинает Костя) по следующим правилам:
   - перед каждым ходом игрок выбирает знак и цвет (красный, зелёный или синий), которым напишет выбранный знак в произвольной свободной клетке доски;
   - если после очередного хода игрока плюсов и минусов выбранного им цвета стало поровну, то игрок автоматически считается проигравшим;

- после заполнения доски для каждого цвета вычисляется, каких знаков оказалось больше: если минусов больше в одном или трёх цветах, то побеждает Маша, иначе побеждает Костя.

Кто может обеспечить себе победу и как для этого необходимо действовать? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: Маша может обеспечить себе победу.

Стратегия. Допустим, Костя первым ходом поставил + синим цветом. Это означает, что среди синих знаков всегда будет больше плюсов, чем минусов (чтобы это изменить, кому-то из игроков придётся сперва уравнять количество знаков, что автоматически считается поражением). Поэтому Маше ничего не остаётся, кроме как повторять Костины ходы в том же цвете, до тех пор, пока Костя не решит поставить какой-либо знак *вторым цветом*, после чего ей останется поставить *третьим цветом* знак так, чтобы в итоге больше минусов оказалось в одном или трёх цветах. После этого ход игры не имеет значения, Маше достаточно следить, чтобы её ходы не уравнивали количество знаков в каком-либо из цветов.

Единственным исключением является ситуация, если Костя так никогда и не поставит знак вторым цветом. В этой ситуации Маше надо будет последним ходом поставить знак вторым цветом так, чтобы ровно в одном из двух цветов было больше минусов.

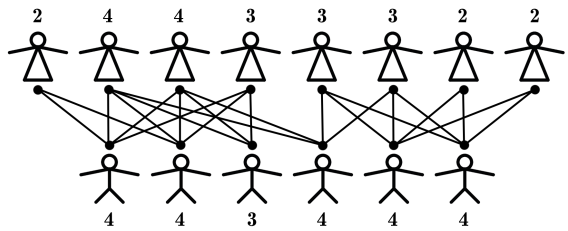
Критерии. За замечание, что результат для каждого из цветов определяется первым знаком этого цвета, ставится 2 балла. За стратегию в исключительном случае даётся 1 балл. Если стратегия описана, но забыто исключение, то за задачу ставится не больше 5 баллов.

4. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.
   - Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
   - Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.
   - Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
   - Ни один мальчик не знаком более чем с четырьмя девочками.

   Какое наибольшее количество девочек могли прийти на олимпиаду, если всего пришло 15 детей? Не забудьте доказать, что это действительно максимальное количество. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 8 девочек.

Решение. Пусть x — число девочек, знающих по два мальчика; тогда мальчиков $15-2-3-x = 10-x$. Тогда количество знакомств не превосходит $4\cdot(10-x) = 40-4x$ (так как каждый мальчик знает не более 4 девочек), и при этом, с точки зрения девочек, оно равно $2\cdot4+3\cdot3+x\cdot2 = 17+2x$. То есть $17+2x \leqslant 40-4x$, откуда $x \leqslant 3$. То есть максимум могло прийти $2+3+3 = 8$ девочек. Пример для 8 девочек показан ниже.



Критерии. Только пример — 2 балла. Только оценка — 3 балла. Только ответ (8) — 0 баллов.

5. Обозначим произвольное трёхзначное число как $\overline{fdi}$, где каждая буква обозначает отдельную цифру. Сколько существует таких чисел $\overline{fdi}$, что $\overline{idf}$ кратно $\overline{fdi}$? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 90.

Решение. Если $\overline{idf} \vdots \overline{fdi}$, то и $(\overline{idf}-\overline{fdi}) \vdots \overline{fdi}$, а $\overline{idf}-\overline{fdi} = (100i+10d+f)-(100f+10d+i) = 99i-99f = 99(i-f)$, то есть $99(i-f) = (9\cdot11\cdot(i-f)) \vdots \overline{fdi}$.

Это очевидно выполняется при $f = i$, так как тогда $\overline{fdi} = \overline{idf}$. Таких чисел 90 штук (9 вариантов для цифры $f = i$, так как она не может быть нулём, и 10 вариантов для цифры d).

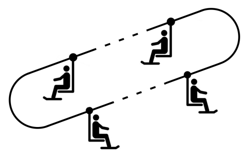
Если же $f \neq i$, то $f-i \geqslant 2$ (иначе $99(i-f) \leqslant 100$) и $f-i \leqslant 9-1 = 8$, откуда непосредственным перебором убеждаемся, что подходящих чисел не найдётся:

- при $i-f = 2$: $99(i-f) = 198$, но 891 не делится на 198;

- при $i - f = 3$: $99(i - f) = 297$, но 792 не делится на 297;
- при $i - f = 4$: $99(i - f) = 396 \vdots 396, 198, 132$, но ни одно не подходит;
- при $i - f = 5$: $99(i - f) = 495 \vdots 495, 165$, но оба не подходят;
- при $i - f = 6$: $99(i - f) = 594 \vdots 594, 297, 198$, но ни одно не подходит;
- при $i - f = 7$: $99(i - f) = 693 \vdots 693, 231$, но оба не подходят;
- при $i - f = 8$: $99(i - f) = 792 \vdots 792, 396, 264, 198, 132$, но все не подходят.

Критерии. 1 балл за указание, что подходят все числа вида $\overline{fdf}$, и ещё 1 балл за верное указание их количества (90 штук). 5 баллов за доказательство того, что других чисел нет.

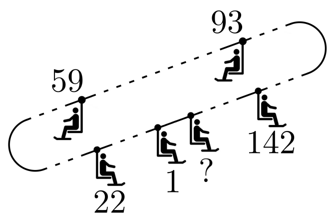
6. Кресла на кресельном подъёмнике Розы Хутор пронумерованы последовательно: 1, 2, 3 и т. д. Расстояния между каждыми двумя соседними сиденьями одинаковы. Во время грозы кресельный подъёмник остановился, и в этот момент кресло 22 находилось на одной высоте с креслом 59, а кресло 93 — на той же высоте, что и кресло 142. Определите количество кресел на кресельном подъёмнике. (*Л. С. Корешкова*)



Ответ: 154.

Решение.

Заметим, что кресла 22 и 142 должны находиться с одной стороны, а 59 и 93 с другой (если бы с одной стороны находились 22 и 93, а с другой 59 и 142, то порядок следования кресел нарушался бы). Значит, между 142 и 22 столько же кресел, сколько между 59 и 93, то есть $93 - 59 - 1 = 33$ кресла. Из них 21 кресло имеют номера от 1 до 21, значит, у 12 кресел номера больше 142. Получается, всего кресел $142 + 12 = 154$.



Критерии. Дан верный ответ (154) без каких-либо обоснований — 1 балл.
Решение верное, но то, что 22 и 142 с одной стороны, никак не обосновано (а просто сразу нарисовано без комментариев) — штраф 1 балл. Ошибки в ± 1 при подсчёте расстояний между креслами, влияющие на ответ — штраф в 2 балла. Арифметические ошибки — штраф в 1 балл.

7. У Софьи есть семь подруг: Алина, Бэлла, Вика, Галя, Дана, Елена, Жанна. Их фотографии (всего 7 штук — по одной на каждую подругу) лежат у Софьи в двух стопках в случайном порядке. За один ход Софья берёт несколько (одну или более) подряд лежащих фотографий с верха любой стопки и, не меняя порядка, кладёт их сверху другой стопки. Всегда ли Софья, сделав не более 13 ходов, сможет сложить фотографии всех подруг в одну стопку, упорядоченную по алфавиту их имён (считая снизу вверх)? (*С. П. Павлов*)

Ответ: всегда.

Решение. Первым ходом сделаем из двух стопок одну (назовём её левой).
Вторым ходом переместим в правую стопку фотографию Алины и все, которые над ней. За 2 хода фотография Алины оказалась внизу правой стопки.
Третьим ходом перенесём всё из правой стопки, кроме фото Алины, в левую стопку.
Четвёртым ходом переносим в правую стопку фотографии Бэллы и все лежащие над ней. В результате после 4-го хода фотографии Алины и Бэллы лежат на месте (внизу правой стопки).
Продолжаем так действовать, тратя два хода на каждую очередную фотографию. (Возможно, в каких-то случаях ничего переносить не придётся, тогда мы сэкономим ходы.) После не более чем 12 ходов получится, что внизу правой стопки лежат 6 фотографий в нужном порядке. Если фото Жанны в левой стопке, то 13-м ходом перенесём его в правую, а если в правой, то оно уже в нужном месте (наверху).

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Любые рассуждения, приводящие к ответу «нет», стоят 0 баллов.
Идея положить за два хода на место первую фотографию — 3 балла. Забыли вернуть фотографию Жанны на место — штраф в 1 балл.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 7 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Можно ли в квадрате 3×3 разместить все числа от 1 до 9 так, чтобы сумма любых двух чисел, соседних по стороне, являлась простым числом? (*М. В. Карлукова*)

   Ответ: нет.

   Решение. В соседних клетках обязательно стоят числа разной чётности (иначе они в сумме дают чётное число больше 2, то есть обязательно составное). То есть в центральной клетке обязательно стоит нечётное число, которое будет складываться со всеми четырьмя чётными числами, однако для любой нечётной цифры хотя бы одна из сумм будет составным числом: $1+8=3+6=5+4=$ $=7+2=9$, $9+6=15$.

   Критерии. За замечание о том, что в соседних клетках стоят числа разной четности, ставится 2 балла.

2. Катя нарисовала у себя в тетради квадраты с чётными сторонами от 2 клеток до 2024 клеток. Ира же под каждым Катиным квадратом нарисовала прямоугольник с тем же периметром, но на 1 меньшей ширины, чем у квадрата. У кого из девочек получилась бóльшая суммарная площадь (в клетках) и на сколько? (*П. Д. Муленко*)

   Ответ: У Кати получилось больше на 1012 клеток.

   Решение. Рассмотрим произвольный Катин квадрат со стороной x. Тогда Ира под ним нарисовала прямоугольник со сторонами $x-1$ и $x+1$ (чтобы периметр не изменился), у которого площадь равна $(x-1)(x+1)=x^2-1$. Таким образом, каждый Ирин прямоугольник имеет площадь на 1 меньшую, чем у Катиного квадрата. А поскольку Катя нарисовала $2024 : 2 = 1012$ квадратов, то у неё и суммарная площадь больше на 1012 клеток.

   Критерии. Показано, что площадь соответствующего квадрата на 1 больше площади прямоугольника – 5 баллов.

3. Найдите все четвёрки различных цифр $a<b<c<d$, такие что $\overline{ab}\cdot\overline{dc}=\overline{ba}\cdot\overline{cd}$.
   Примечание. Запись $\overline{ab}$ означает двузначное число, составленное из цифр a и b. (*Л. С. Корешкова*)

   Ответ: таких четвёрок 5: (1, 2, 3, 6); (1, 2, 4, 8); (2, 3, 4, 6); (2, 3, 6, 9); (3, 4, 6, 8).

   Решение. $\overline{ab}\cdot\overline{dc}=(10a+b)(10d+c)=100ad+10ac+10bd+bc$; аналогично $\overline{ba}\cdot\overline{cd}=100bc+10bd+10ac+ad$. Приравнивая эти выражения, получаем $a\cdot d=b\cdot c$.
   - Среди цифр точно нет цифр 0, 5, и 7 (иначе две пары заведомо не построить из различных цифр).
   - Если наименьшая из цифр (то есть a) равна 1, то подходят варианты $1\cdot 6=2\cdot 3$ и $1\cdot 8=2\cdot 4$, то есть две группы: (1, 2, 3, 6) и (1, 2, 4, 8).
   - Если $a=2$, то есть ещё две группы: (2, 3, 4, 6) и (2, 3, 6, 9).
   - Если $a=3$, то есть ещё одна группа: (3, 4, 6, 8).

   Дальше групп не находится, то есть четвёрок всего 5.

   Критерии. Показано, что среди цифр нет 0, 5 и 7, — 3 балла. За любой потерянный принципиальный случай при переборе вычитается 2 балла. При полностью описанной системе перебора и рассмотрении всех принципиальных случаев за потерю одного из вариантов внутри случая вычитается 1 балл.

4. Костя и Маша по очереди ставят в клетки доски 8×8 числа $+1$ и -1 (начинает Костя) по следующим правилам:

- перед каждым ходом игрок выбирает число и цвет (красный, зелёный или синий), которым напишет выбранное число в произвольной свободной клетке доски;
- если после хода игрока сумма чисел выбранного им цвета оказалась равной нулю, этот игрок автоматически считается проигравшим;
- после заполнения доски подсчитываются суммы чисел каждого цвета: если произведение этих сумм положительно, то побеждает Костя, а если отрицательно — то Маша; если какой-либо цвет так и не был использован, он не участвует в подсчёте.

Кто может обеспечить себе победу и как для этого необходимо действовать? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: Маша может обеспечить себе победу.

Стратегия. Допустим, Костя первым ходом поставил $+1$ синим цветом. Это означает, что сумма синих чисел всегда будет положительна (чтобы это изменить, кому-то из игроков придётся сперва сделать её равной нулю, что автоматически считается поражением). Поэтому Маше ничего не остаётся, кроме как повторять Костины ходы в том же цвете, до тех пор, пока Костя не решит поставить какое-либо число *вторым цветом*, после чего ей останется поставить *третьим цветом* поставить число так, чтобы в итоге в одном или трёх цветах оказалась отрицательная сумма (что и обеспечит отрицательное произведение). После этого ход игры не имеет значения, Маше достаточно следить, чтобы её ходы не обнуляли сумму в каком-либо из цветов.

Единственным исключением является ситуация, если Костя так никогда и не поставит число вторым цветом. В этой ситуации Маше надо будет последним ходом поставить число вторым цветом так, чтобы ровно в одном из двух цветов сумма оказалась отрицательна.

Если же Костя первым ходом поставил -1, то Маша действует точно также: при добавлении второго цвета она добавляет третий с нужным знаком, а иначе последним ходом ставит $+1$ другим цветом.

Критерии. За замечание, что сумма чисел одного цвета определяется первым слагаемым, ставится 2 балла. За стратегию в исключительном случае даётся 1 балл. Если стратегия описана, но забыто исключение, то за задачу ставится не больше 5 баллов.

5. У Софьи есть десять подруг: Алина, Валерия, Диана, Екатерина, Жанна, Инна, Карина, Лилия, Марина, Ольга. Их фотографии (всего 10 штук — по одной на каждую подругу) лежат у Софьи в двух стопках в случайном порядке. За один ход Софья берёт несколько (одну или более) подряд лежащих фотографий с верха любой стопки и, не меняя порядка, кладёт их сверху другой стопки. Всегда ли Софья, сделав не более 21 хода, сможет сложить фотографии всех подруг в одну стопку, упорядоченную по алфавиту их имён (считая снизу вверх)? (*С. П. Павлов*)

Ответ: да; Софье всегда хватит даже 19 ходов.

Решение. Первым ходом сделаем из двух стопок одну (назовём её левой).

Вторым ходом переместим в правую стопку фотографию Алины и все, которые над ней. За 2 хода фотография Алины оказалась внизу правой стопки.

Третьим ходом перенесём всё из правой стопки, кроме фото Алины, в левую стопку.

Четвёртым ходом переносим в правую стопку фотографии Валерии и все лежащие над ней. В результате после 4-го хода фотографии Алины и Валерии лежат на месте (внизу правой стопки).

Продолжаем так действовать, тратя два хода на каждую очередную фотографию. (Возможно, в каких-то случаях ничего переносить не придётся, тогда мы сэкономим ходы.) После не более чем 18 ходов получится, что внизу правой стопки лежат 9 фотографий в нужном порядке. Если фото Ольги в левой стопке, то 19-м ходом перенесём его в правую, а если в правой, то оно уже в нужном месте (наверху).

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Любые рассуждения, приводящие к ответу «нет», стоят 0 баллов. Идея положить за два хода на место первую фотографию — 3 балла. Забыли вернуть фотографию Ольги на место — штраф в 1 балл.

6. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.
   - Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
   - Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.

- Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
- Никакие два ребёнка одного пола не знакомы между собой.
- Любой ребёнок может передать шпаргалку в руки любому своему знакомому.

Оказалось, что любая девочка может отправить шпаргалку любому мальчику (даже незнакомому через других детей), но, стоит организаторам начать пристально следить хотя бы за одной парой знакомых детей, эта возможность нарушится (то есть найдутся такие мальчик и девочка, которые не смогут передать друг другу шпаргалку). Кого пришло на олимпиаду больше (мальчиков или девочек) и на сколько? (*Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко*)

Ответ: мальчиков на 8 больше, чем девочек.

Решение. Обозначим количество девочек с двумя знакомыми за x, тогда общее число знакомств равно $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + x \cdot 2 = 17 + 2x$. С другой стороны, если нарисовать граф, описывающий знакомства (где дети являются вершинами, а знакомства — рёбрами), то этот граф окажется деревом — действительно, изначально граф был связен, так как каждая девочка могла передать шпаргалку любому мальчику (а через него — и любой другой девочке), но удаление любого ребра делает его несвязным, что является одним из определений дерева. Поэтому количество рёбер (то есть знакомств) на 1 меньше, чем число вершин: $17 + 2x = 2 + 3 + x + m - 1$, где m — количество мальчиков, пришедших на олимпиаду. Таким образом, $m = x + 13 = (x + 5) + 8$, где $x + 5$ — общее число девочек, пришедших на олимпиаду, то есть мальчиков пришло на 8 больше.

Критерии. Замечание о том, что детей на 1 больше, чем знакомств, стоит 3 балла. Если при подсчетах получилось, что мальчиков на 13 больше, из-за забытых девочек с 3 и 4 знакомыми — ставим 5 баллов. Если выразили число знакомств через количество девочек — 2 балла.

Решение вида «нарисуем 5 девочек и 13 мальчиков, а дальше добавляем +1Д, +1М» — 2 балла.

Только верный ответ с примером — 1 балл.

7. Два продуктовых автомата продают один и тот же бургер, но каждый из них сломан и изменяет все числа на экране на некоторое постоянное значение (вся остальная информация верна). Компания, обслуживающая эти автоматы, на время ремонта решила вывести сооответствующие уведомления. На экранах при этом высветилось следующее:

Другой автомат выводит все числа на экране на 2 больше, чем они есть на самом деле. Бургер: **$2**	*Другой автомат выводит все числа на 8 меньше, чем они есть на самом деле.* Бургер: **$10**

Какова реальная цена бургера? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: \$5.

Решение. Из высветившихся текстов следует, что первый автомат уменьшает все числа на некоторое значение (пусть x), а второй автомат, наоборот, увеличивает все числа на некоторое значение (пусть y). Тогда первый автомат выводит реальное увеличение второго автомата y, уменьшенное на x, и получается 2; а второй автомат выводит реальное уменьшение первого автомата x, увеличенное на y, и получается 8:

$$\begin{cases} y - x = 2, \\ x + y = 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5, \\ x = 3. \end{cases}$$

Таким образом, бургер в реальности стоит $2 + x = 10 - y = 2 + 3 = 10 - 5 = 5$ долларов.

Критерии. Вычислено, на сколько именно изменяет значение один из автоматов, без нахождения итогового ответа — 6 баллов. Составлено, но не решено, уравнение (или система уравнений), приводящее к верному ответу — 4 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 8 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Фигура «*слонь*» делает один ход как слон, следующий — как конь, далее — как слон и т.д. (иными словами, ходы слона и коня чередуются). Может ли она обойти шахматную доску, побывав на каждой клетке ровно один раз? (*О. А. Пяйве*)

Ответ: да. Пример показан ниже: слонь начинает путь на клетке под номером 1 ходом слона в клетку 2, потом конём в клетку 3 и т. д.(клетки, куда он попадает ходом слона, отмечены жирным шрифтом). Заметим, что в этом примере каждая из четвертей доски обходится одинаковым образом.

8	**52**	**58**	**64**	49	**36**	45	47	**38**
7	61	**56**	53	59	**42**	**40**	**34**	**44**
6	63	**50**	55	57	**48**	37	39	**46**
5	**54**	**60**	**62**	51	33	43	41	35
4	**20**	**26**	**32**	17	**4**	13	15	**6**
3	29	**24**	21	27	**10**	**8**	**2**	**12**
2	31	**18**	23	25	**16**	5	7	**14**
1	**22**	**28**	**30**	19	1	11	9	3
	a	b	c	d	e	f	g	h

Критерии. Пример — 7 баллов.
Рассуждение «может, потому что конь каждым ходом меняет цвет клетки, а слон нет» — 2 балла. Если преведено решение только для одной четверти — 4 балла

2. Конструктор состоит из белых кубиков. Паша собирает из кубиков большой куб, затем выбирает 4 грани куба и красит их в красный цвет. После чего разбирает большой куб и считает кубики, у которых по крайней мере одна грань окрашена в красный цвет. У Паши получился 431 такой кубик. Могло ли такое произойти? Если да, то найдите все варианты общего количества кубиков. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: Да, могло, если у Паши изначально был $11^3 = 1331$ кубик.

Решение. Пусть ребро большого куба состоит из n рёбер маленьких кубиков. Закрасить 4 грани куба можно двумя путями: «кольцом», оставляя незакрашенными две противоположные грани, и «полкой», оставляя незакрашенными две смежные грани.
В «кольце» общее количество закрашенных кубиков равно количеству кубиков в 4 гранях минус количество кубиков в 4 рёбрах, которые были посчитаны дважды, то есть $4n^2 - 4n$.
В «полке» общее количество закрашенных кубиков равно количеству кубиков в 4 гранях минус количество кубиков в 5 общих рёбрах плюс 2 вершины куба, в которых сходятся тройки граней и рёбер (так как мы их до этого по 3 раза учли в гранях и по 3 раза вычли в рёбрах), то есть $4n^2 - 5n + 2$.
Далее можно действовать по-разному.
Первый способ. Если $n \leqslant 10$, то Паша закрасил менее чем $4n^2 \leqslant 400$ кубиков, а если $n \geqslant 12$, то более чем $4n^2 - 5n > 4n(n-2) \geqslant 4 \cdot 12 \cdot 10 = 480$ кубиков. Таким образом, если у Паши и

мог получиться 431 закрашенный кубик, то только при $n = 11$ — действительно, при окраске «полкой» у него как раз получился бы $4 \cdot 11^2 - 5 \cdot 11 + 2 = 431$ закрашенный кубик.

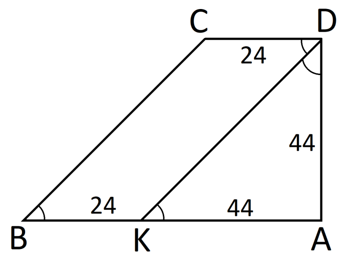
Второй способ. Надо найти натуральные корни каждого из двух уравнений: $4(n^2 - n) = 431$ (для окраски «кольцом») и $4n^2 - 5n + 2 = 431$ (для окраски «полкой»). Решение обоих уравнений с помощью дискриминанта даёт иррациональные решения в первом уравнении и корни $\frac{5 \pm 83}{8}$ во втором, только один из которых является натуральным (а именно $n = \frac{5+83}{8} = 11$).

Критерии. 3 балла — получены квадратные уравнения без дальнейших верных продвижений.
4 балла — полностью посчитан один из двух случаев: полка или кольцо.

3. В трапеции $ABCD$ основание CD равно 24, $AD = 44$, а угол B в 2 раза меньше угла D. Какова максимально возможная площадь трапеции? (*Л. С. Корешкова, А. А. Теслер*)

Ответ: 2024.

Решение. Проведём биссектрису DK угла D, где K — точка на основании AB. Тогда $\angle CDK = \angle CBK$ по условию (то есть $DCBK$ — параллелограмм, то есть $BK = CD = 24$) и $\angle CDK = \angle DKA$ как накрест лежащие (то есть $\triangle ADK$ — равнобедренный, и $AK = AD = 44$). Максимальная площадь требует максимальной высоты, что достигается, когда $\triangle ADK$ прямоугольный (иными словами, высота трапеции заведомо не больше боковой стороны). Итого максимальная площадь равна $\frac{24+68}{2} \cdot 44 = 2024$.



Критерии. Рассуждения про биссектрису и равнобедренный треугольник — 2 балла.
Если не обосновано, что $DCBK$ — параллелограмм, — штраф в 2 балла.

4. Два продуктовых автомата продают один и тот же бургер, но каждый из них сломан и изменяет все числа на экране в некоторое постоянное количество раз (вся остальная информация верна). Компания, обслуживающая эти автоматы, на время ремонта решила вывести соооответствующие уведомления. На экранах при этом высветилось следующее:

*Другой автомат выводит все числа на экране **на 100% больше**, чем они есть на самом деле.* Бургер: **\$2**	*Другой автомат выводит все числа **в 6 раз меньше**, чем они есть на самом деле.* Бургер: **\$12**

Какова реальная цена бургера? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: \$4.

Решение. Из высветившихся текстов следует, что первый автомат уменьшает все числа в некоторое постоянное положительное число раз (пусть x), а второй автомат, наоборот, увеличивает все числа в некоторое постоянное число раз (пусть y). Тогда первый автомат выводит реальное увеличение второго автомата y в процентах, уменьшенное в x раз, и получается 100%; а второй автомат выводит реальное уменьшение первого автомата x, увеличенное в y раз, и получается 6:

$$\begin{cases} \frac{(y-1)\cdot 100\%}{x} = 100\%, \\ x \cdot y = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = x, \\ xy = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1, \\ x(x+1) = 6. \end{cases}$$

Второе уравнение можно решить как квадратное. Но можно и просто угадать единственный положительный корень $x = 2$ (он единственен, поскольку чем больше положительное число x, тем больше величина $x(x+1)$). Итак, $x = 2$ и $y = 3$. Таким образом, бургер в реальности стоит $2 \cdot x = 12 : y = 4$ доллара.

Критерии. Подобранный ответ с проверкой, что он подходит под все условия — 2 балла.

5. У Софьи есть N подруг с разными именами: Алина, Бэлла, Вика, ..., Яна. Их фотографии (всего N штук — по одной на каждую подругу) лежат у Софьи в двух стопках в случайном порядке. За один ход Софья берёт несколько (одну или более) подряд лежащих фотографий с верха любой

стопки и, не меняя порядка, кладёт их сверху другой стопки. Всегда ли Софья, сделав не более $2N+1$ ходов, сможет сложить фотографии всех подруг в одну стопку, упорядоченную по алфавиту их имён (считая снизу вверх)? (*С. П. Павлов*)

Ответ: да; Софье всегда хватит даже $2N-1$ ходов.

Решение. Первым ходом сделаем из двух стопок одну (назовём её левой).
Вторым ходом переместим в правую стопку фотографию Алины и все, которые над ней. За 2 хода фотография Алины оказалась внизу правой стопки.
Третьим ходом перенесём всё из правой стопки, кроме фото Алины, в левую стопку.
Четвёртым ходом переносим в правую стопку фотографии Бэллы и все лежащие над ней. В результате после 4-го хода фотографии Алины и Бэллы лежат на месте (внизу правой стопки).
Продолжаем так действовать, тратя два хода на каждую очередную фотографию. (Возможно, в каких-то случаях ничего переносить не придётся, тогда мы сэкономим ходы.) После не более чем $2(N-1)$ ходов получится, что внизу правой стопки лежат $N-1$ фото в нужном порядке. Если фото Яны в левой стопке, то последним ($2N-1$-м) ходом перенесём его в правую, а если в правой, то оно уже в нужном месте (наверху).

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Любые рассуждения, приводящие к ответу «нет», стоят 0 баллов. Идея положить за два хода на место первую фотографию — 3 балла. Забыли вернуть фотографию Яны на место — штраф в 1 балл.

6. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.
   - Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
   - Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.
   - Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
   - Никакие два ребёнка одного пола не знакомы между собой.
   - Любой ребёнок может передать шпаргалку в руки любому своему знакомому.

   Оказалось, что любая девочка может отправить шпаргалку любому мальчику (даже незнакомому через других детей), но, стоит организаторам начать пристально следить хотя бы за одной парой знакомых детей, эта возможность нарушится (то есть найдутся такие мальчик и девочка, которые не смогут передать друг другу шпаргалку). Кого пришло на олимпиаду больше (мальчиков или девочек) и на сколько? (*Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко*)

Ответ: мальчиков на 8 больше, чем девочек.

Решение. Обозначим количество девочек с двумя знакомыми за x, тогда общее число знакомств равно $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + x \cdot 2 = 17 + 2x$. С другой стороны, если нарисовать граф, описывающий знакомства (где дети являются вершинами, а знакомства — рёбрами), то этот граф окажется деревом — действительно, изначально граф был связен, так как каждая девочка могла передать шпаргалку любому мальчику (а через него — и любой другой девочке), но удаление любого ребра делает его несвязным, что является одним из определений дерева. Поэтому количество рёбер (то есть знакомств) на 1 меньше, чем число вершин: $17 + 2x = 2 + 3 + x + m - 1$, где m — количество мальчиков, пришедших на олимпиаду. Таким образом, $m = x + 13 = (x + 5) + 8$, где $x + 5$ — общее число девочек, пришедших на олимпиаду, то есть мальчиков пришло на 8 больше.

Критерии. Замечание о том, что детей на 1 больше, чем знакомств, стоит 3 балла. Если при подсчетах получилось, что мальчиков на 13 больше, из-за забытых девочек с 3 и 4 знакомыми — ставим 5 баллов. Если выразили число знакомств через количество девочек — 2 балла.
Решение вида «нарисуем 5 девочек и 13 мальчиков, а дальше добавляем +1Д, +1М» — 2 балла.
Только верный ответ с примером — 1 балл.

7. Александра, Владимир, Любовь и Оксана выписывают натуральные числа, состоящие из пяти различных ненулевых цифр.
   - Александра выписывает все числа, у которых первая цифра — 1.
   - Владимир выписывает все числа, первые две цифры которых — 1 и 2 в любом порядке.
   - Любовь выписывает все числа, первые три цифры которых — это 1, 2 и 3 в любом порядке.
   - Оксана выписывает все числа, первые 4 цифры которых — 1, 2, 3 и 4 в любом порядке.

Сколько пятизначных чисел из различных ненулевых цифр не появились ни в одном из списков?
(*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 13075 чисел.

Решение. Всего пятизначных чисел с различными цифрами $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$.
Сперва Александра выпишет все числа, начинающиеся с цифры 1: $1 \cdot (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5) = 1680$ чисел.
Затем Владимир дополнительно выпишет числа, начинающиеся на 21: $1 \cdot 1 \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5) = 210$ чисел.
После этого Любовь допишет числа, начинающиеся на 231, 312 и 321, всего $3 \cdot (6 \cdot 5) = 90$ чисел.
Наконец, Оксана допишет те числа, которые начинаются на 2341, 2413, 2431, 3412, 3421, 3142, 3241, а также числа, первая цифра которых 4, после чего идут цифры 1, 2 и 3 в произвольном порядке: $(7 + 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 5 = 65$ чисел.
Итого не будет выписано $15120 - 1680 - 210 - 90 - 65 = 13075$ чисел.

Критерии. Подсчёт какого-то из количеств: всех чисел, чисел Любы, Владимира, Саши, Оксаны — по одному баллу (но в сумме не больше 3). Решение, где всё подсчитали верно, но не учли повторы — 3 балла. Арифметическая ошибка — штраф в 1 балл каждая. Ошибка из-за неучета пересечений или перестановок — штраф в 2 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 9 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Несколько ребят решили устроить серию испытаний на выбывание, победитель которой получит звание короля класса. В интервью школьной газете победитель рассказал следующее:
   (a) В первом и последнем испытаниях в сумме выбыло столько же, сколько во всех остальных вместе взятых.
   (b) Во втором испытании выбыло столько же, сколько и во всех последующих вместе взятых.
   (c) В первом испытании выбыло меньше всего участников.

   Докажите, что он где-то ошибся. (*П. Д. Муленко*)

   Примечание. По этой задаче было следующее добавление к условию: испытаний не менее четырёх; количество выбывших в первом испытании **строго** меньше, чем в любом другом.

   Решение. Обозначим количество выбывших в первом испытании через a, во втором — через b, с третьем — через c, в последнем — через z, в остальных (если они были) — через M. Первые два условия записываются так: $a + z = b + c + M$, $b = c + M + z$. Подставляя второе в первое, получаем, что $a+z = 2c+2M+z$, то есть $a = 2(c+M)$. Но это противоречит последнему условию, по которому a должно быть меньше c.

   Примечание. Добавление, что испытаний не менее четырёх, существенно. Иначе подошёл бы, например, случай, где испытаний всего 3, в первом выбыло 0 человек, а в третьем столько же, сколько во втором. В качестве упражнения попробуйте понять, что именно некорректно в вышеприведённом решении, если испытаний только три.

   Критерии. 1 балл — условие переписано в терминах неравенств.

2. Конструктор состоит из белых кубиков. Паша собирает из кубиков большой куб, затем выбирает 4 грани куба и красит их в красный цвет. После чего разбирает большой куб и считает кубики, у которых по крайней мере одна грань окрашена в красный цвет. У Паши получилось больше 500, но меньше 600 таких кубиков. А сколько именно? Найдите все варианты. (*Л. С. Корешкова*)

   Ответ: У Паши могло получиться 518 или 528 кубиков.

   Решение. Пусть ребро большого куба состоит из n рёбер маленьких кубиков. Закрасить 4 грани куба можно двумя путями: «кольцом», оставляя незакрашенными две противоположные грани, и «полкой», оставляя незакрашенными две смежные грани.

   В «кольце» общее количество закрашенных кубиков равно количеству кубиков в 4 гранях минус количество кубиков в 4 рёбрах, которые были посчитаны дважды, то есть $4n^2 - 4n$.

   В «полке» общее количество закрашенных кубиков равно количеству кубиков в 4 гранях минус количество кубиков в 5 общих рёбрах плюс 2 вершины куба, в которых сходятся тройки граней и рёбер (так как мы их до этого по 3 раза учли в гранях и по 3 раза вычли в рёбрах), то есть $4n^2 - 5n + 2$.

   Далее можно действовать по-разному.

   Первый способ. Если $n \leqslant 11$, то Паша закрасил менее чем $4n^2 \leqslant 484$ кубика, а если $n \geqslant 13$, то более чем $4n^2 - 5n \geqslant 4 \cdot 13^2 - 5 \cdot 13 = 169 \cdot 4 - 65 > 600$ (чем больше n, тем больше кубиков закрашено при любом способе).

   Таким образом, от 500 до 600 кубиков могло получиться только при $n = 12$. В этом случае при окраске «кольцом» получается $4 \cdot (12^2 - 12) = 528$ окрашенных кубиков, а при окраске «полкой» — $4 \cdot 12^2 - 5 \cdot 12 + 2 = 518$ кубиков.

Второй способ. Надо найти решения в натуральных числах у хотя бы одного из двойных неравенств на число окрашенных кубиков:

$$\left[\begin{array}{l} 500 \leqslant \quad 4(n^2-n) \leqslant 600, \\ 500 \leqslant \ 4n^2-5n+2 \leqslant 600. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4n^2-4n-500 \geqslant 0, \\ 4n^2-4n-600 \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4n^2-5n-498 \geqslant 0, \\ 4n^2-5n-598 \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Непосредственное решение обеих систем неравенств даёт только одно натуральное решение (а именно $n = 12$), причём в обеих системах.

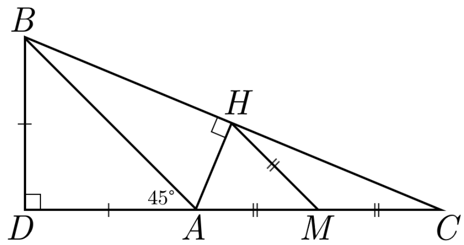
Критерии. 3 балла — доказано, что $n = 12$. Ещё по два балла за каждый ответ. Верно написана, но не решена система — 2 балла. Решение задачи только в одном из случаев (кольцо/полка) — 4 балла.

3. В треугольнике ABC угол A равен 135°, $AB = 14$, $BC = 26$. Точка H является основанием высоты из точки A, M — середина AC. Найдите HM. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Решение. Продлим CA за точку A и опустим на получившийся луч перпендикуляр BD.

$\angle BAD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, то есть $\triangle BAD$ — равнобедренный прямоугольный, и $BD = DA = 7\sqrt{2}$. Треугольник BCD тоже прямоугольный, поэтому $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 17\sqrt{2}$, откуда $AC = DC - DA = 10\sqrt{2}$. HM является медианой из вершины прямого угла прямоугольного треугольника AHC, поэтому $HM = AC/2 = 5\sqrt{2}$.



4. Решите уравнение $[x]^2 + \{x\}^2 = 2x^2$. (Здесь $[x]$ и $\{x\}$ — целая и дробная части x.) (*С. П. Павлов*)

Ответ: 0, $1-\sqrt{3}$, $2-2\sqrt{3}$, $3-3\sqrt{3}$.

Решение. Перепишем условие, используя, что $x = [x] + \{x\}$, и получим: $[x]^2 + \{x\}^2 = 2[x]^2 + 2\{x\}^2 + 4[x]\{x\}$, то есть $[x]^2 + \{x\}^2 + 4[x]\{x\} = 0$. Видим тривиальное решение $x = 0$; все остальные корни должны иметь отрицательную целую часть (иначе левая часть положительна).
Поделим уравнение на $[x]^2$ (ведь $[x] \neq 0$), сделаем замену $t = \frac{\{x\}}{[x]}$ и получим квадратное уравнение $t^2 + 4t + 1 = 0$ с корнями $t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$.
Корень $t_1 = -2 - \sqrt{3}$ не подходит, так как тогда $\{x\} \geqslant 2 + \sqrt{3} \geqslant 1$. А при обратной подстановке $\frac{\{x\}}{[x]} = -2 + \sqrt{3}$ и условии $0 \leqslant \{x\} < 1$ получается, что возможные значения для целой части — $[x] \in \{-1; -2; -3\}$, откуда $x \in \{0,\ 1-\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3}, 3-3\sqrt{3}\}$.

Критерии. Получено, что $x \geqslant 0$ — 2 балла. Верно решено квадратное уравнение — 2 балла. Каждый потерянный корень — штраф в 1 балл.

5. Назовём *униквадратной* дробь вида $\dfrac{1}{n^2}$, где n — натуральное число. Найдите максимальную униквадратную дробь, представимую в виде суммы двух униквадратных дробей. (*С. П. Павлов, А. А. Теслер*)

Ответ: $\dfrac{1}{144}$ (представима в виде $\dfrac{1}{12^2} = \dfrac{1}{15^2} + \dfrac{1}{20^2}$).

Решение. Пусть $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$, тогда $p^2q^2 = p^2n^2 + q^2n^2$. Другими словами, (pn, qn, pq) является пифагоровой тройкой. Обозначим через g наибольший общий делитель чисел pn и qn. Тогда g делит pq, $(a, b, c) = (\dfrac{pn}{g}, \dfrac{qn}{g}, \dfrac{pq}{g})$ является примитивной пифагоровой тройкой (из попарно взаимно простых чисел), $n = \sqrt{\dfrac{gab}{c}}$, $p = \sqrt{\dfrac{gac}{b}}$, $q = \sqrt{\dfrac{gbc}{a}}$. Так как под корнями должны быть целые числа и a, b, c попарно взаимно просты, то все три числа a, b, c делят g.
Так как a или b делится на 3 (иначе c^2 давало бы остаток $a^2+b^2 \equiv 2$ по модулю 3, что невозможно), то n тоже делится на 3. Кроме того, a или b делится на 4 (иначе a^2+b^2 давало бы остаток 1 или 5 по модулю 8, но они не являются остатками точных квадратов), поэтому n делится на 4 (выражение под корнем делится на 4 благодаря a или b и ещё на 4 благодаря g). Следовательно, $n \geqslant 12$, и случай $n = 12$ реализуется при $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $g = 60$, $p = 15$, $q = 20$.

Критерии. За пример ставится 3 балла, за оценку — 4.

6. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.
   - Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
   - Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.
   - Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
   - Никакие два ребёнка одного пола не знакомы между собой.
   - Любой ребёнок может передать шпаргалку в руки любому своему знакомому.

   Оказалось, что любая девочка может отправить шпаргалку любому мальчику (даже незнакомому через других детей), но, стоит организаторам начать пристально следить хотя бы за одной парой знакомых детей, эта возможность нарушится (то есть найдутся такие мальчик и девочка, которые не смогут передать друг другу шпаргалку). Кого пришло на олимпиаду больше (мальчиков или девочек) и на сколько? (*Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко*)

Ответ: мальчиков на 8 больше, чем девочек.

Решение. Обозначим количество девочек с двумя знакомыми за x, тогда общее число знакомств равно $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + x \cdot 2 = 17 + 2x$. С другой стороны, если нарисовать граф, описывающий знакомства (где дети являются вершинами, а знакомства — рёбрами), то этот граф окажется деревом — действительно, изначально граф был связен, так как каждая девочка могла передать шпаргалку любому мальчику (а через него — и любой другой девочке), но удаление любого ребра делает его несвязным, что является одним из определений дерева. Поэтому количество рёбер (то есть знакомств) на 1 меньше, чем число вершин: $17 + 2x = 2 + 3 + x + m - 1$, где m — количество мальчиков, пришедших на олимпиаду. Таким образом, $m = x + 13 = (x + 5) + 8$, где $x + 5$ — общее число девочек, пришедших на олимпиаду, то есть мальчиков пришло на 8 больше.

Критерии. Замечание о том, что детей на 1 больше, чем знакомств, стоит 3 балла. Если при подсчетах получилось, что мальчиков на 13 больше, из-за забытых девочек с 3 и 4 знакомыми — ставим 5 баллов. Если выразили число знакомств через количество девочек — 2 балла.

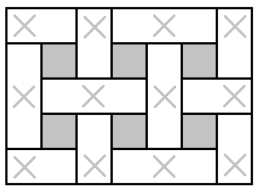
Решение вида «нарисуем 5 девочек и 13 мальчиков, а дальше добавляем +1Д, +1М» — 2 балла.

Только верный ответ с примером — 1 балл.

7. Можно ли разрезать квадрат 100×100 по границам клеток на 2024 прямоугольника так, чтобы объединение никакого набора от 2 до 2023 прямоугольников не являлось прямоугольником? (*А. А. Теслер*)

Ответ: да.

Решение. Приведём одну из возможных конструкций. Рассмотрим прямоугольник $(2n+1)\times(2m+1)$ с нечётными сторонами, где $nm \geqslant 2$. Разобьём его на прямоугольники 1×1, 1×2, 1×3, 2×1, 3×1 как на рисунке (где $n = 2$ и $m = 3$), то есть вырежем квадратики на пересечении строк и столбцов с чётными номерами (показаны серым), а между соседними такими квадратиками расположим прямоугольники 1×3 и 3×1 чередующимся образом (прямоугольники из двух клеток получаются при обрезании границами большого прямоугольника). Заметим, что полученные кусочки (кроме квадратов) находятся во взаимно однозначном соответствии с клетками, отмеченными крестиком. Поэтому всего имеется $nm + (n+1)(m+1)$ кусочков.



Более того, при ограничении $nm \geqslant 2$ нет никакого прямоугольника, целиком состоящего из получившихся маленьких прямоугольников, отличного от них и от всего большого прямоугольника. Действительно, если он содержит квадратик, то он содержит и какого-то его соседа, а тогда он содержит всех его соседей и ближайшие квадратики. Если же он содержит какой-то прямоугольник, то легко проверить, что он тогда содержит и соседний с ним квадратик.

При $\{n, m\} = \{28, 35\}$ получится 2024 прямоугольника, причём $2n + 1$ и $2m + 1$ не больше 100. Теперь в получившемся разрезании расширим первые строку и столбец до нужной ширины, чтобы получить требуемое разрезание квадрата 100×100.

Критерии. Если не доказывается, что приведённый пример удовлетворяет условиям, то ставится не больше 5 баллов.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 10 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. В 10А и 10Б классах учатся по 30 человек. Средний рост мальчиков в 10А классе больше, чем средний рост мальчиков в 10Б. И средний рост девочек в 10А классе больше, чем средний рост девочек в 10Б. Может ли оказаться, что средний рост всех учеников 10А класса меньше, чем средний рост всех учеников 10Б? (*А. А. Теслер*)

   Решение. Да. Например, пусть в 10А классе 10 мальчиков и 20 девочек, а в 10Б — наоборот. Также пусть мальчики из 10А имеют рост 181 см, мальчики из 10Б — 180 см, девочки из 10А — 175 см, девочки из 10Б — 174 см. Тогда в 10А средний рост равен 177 см, а в 10Б — 178 см.

2. Функция f задана формулой $f(x) = \dfrac{2x}{3x^2+1}$. Докажите, что для любых двух вещественных взаимно обратных чисел s и t сумма $f(s) + f(t)$ не превосходит 1. (*С. П. Павлов*)

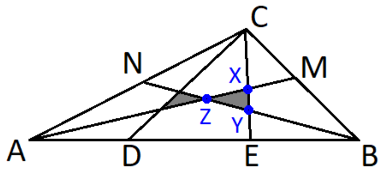
   Решение. Пусть $s \neq 0$, $t = s^{-1}$ и $u = s + s^{-1}$, тогда

$$f(s)+f(t) = \frac{2s}{3s^2+1} + \frac{2s^{-1}}{3s^{-2}+1} = \frac{8s+8s^{-1}}{(3s^2+1)(3s^{-2}+1)} = \frac{8u}{3(s^2+s^{-2})+10} = \frac{8u}{3(u^2-2)+10} = \frac{8u}{3u^2+4}.$$

   Требуется доказать, что $f(s) + f(t) \leqslant 1$, то есть $3u^2 - 8u + 4 \geqslant 0$. Это квадратное неравенство ложно только при $\frac{2}{3} < u < 2$. Но u либо отрицательно (при $s < 0$), либо не меньше 2 (при $s > 0$, это следует из неравенства о средних).

   Критерии. За идею с заменой даётся 2 балла. Если не учтено, что s и t могут быть отрицательными, ставится не больше 5 баллов.

3. В треугольнике ABC проведены две медианы AM и BN. Третья вершина C соединена с точками D и E, которые делят AB на три равные части. Какую долю площади треугольника ABC занимают два закрашенных треугольника? (*Л. С. Корешкова*)



   Ответ: $\dfrac{1}{30}$.

   Решение. Введём обозначения $X = AM \cap CE$, $Y = BN \cap CE$, $Z = AM \cap BN$. Из теоремы Менелая, применённой к $\triangle AMB$ и прямой CE, следует: $AX : XM = 4 : 1$. Из этой же теоремы, применённой к $\triangle ANB$ и прямой CE, получается $NY = YB$. Кроме того, $AZ : ZM = ZB : ZN = 2 : 1$ по свойству медиан. Так как $S_{ZMB} = \frac{1}{6}S_{ABC}$ (медианы делят любой треугольник на шесть равновеликих частей), то

$$S_{XYZ} = \frac{1}{2}ZX \cdot ZY \cdot \sin\angle MZB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}ZM \cdot \frac{1}{4}ZB \cdot \sin\angle MZB = \frac{1}{10}S_{ZMB} = \frac{1}{60}S_{ABC}.$$

   Аналогично находится и площадь второго закрашенного треугольника, равная площади первого.

   Критерии. За формулировку теоремы Менелая или за утверждение о сохранении отношения площадей при аффинных преобразованиях ставится 2 балла (они не складываются).

4. В мешке для игры в лото лежат 10 бочонков со следующими числами: 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20, 30, 53, 75. Из мешка вынимаются три бочонка и из чисел, которые можно образовать, расставляя их, записывается наибольшее. Пример: если вы вытащили бочонки 7, 20, 30, то вы запишете число 73020. Сколько чисел, больших 2024, можно записать? (*Л. С. Корешкова*)

   Ответ: $C_{10}^3 - C_5^3 - 6 = 104$.

Решение. Отсортируем бочонки следующим образом: 7, 75, 5, 53, 3, 30, 2, 20, 1, 10. Заметим, что в записанном числе бочонки идут в том же порядке, в котором они отсортированы (т. е. если переставить любые два бочонка, то составленное из них число уменьшится). Если взять 3 однозначных бочонка, то составленное число будет меньше 2024, а в остальных случаях оно строго больше: если оно пяти- или шестизначное, то это очевидно; если первая цифра больше 2, это тоже очевидно, и остаются только два случая $2|20|1$ и $2|1|10$. Всего $C_{10}^3 - C_5^3 = 110$ способов выбрать бочонки.

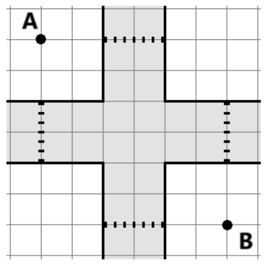
Однако некоторые числа соответствуют более чем одному набору бочонков (например, 7553 получается из наборов 75, 5, 3 и 7, 5, 53). Остаётся найти все такие числа. Разобьём число на две части, состоящие из бочонков с 7 по 3 и с 30 по 10. Заметим, что вторая часть выделяется и разбивается на бочонки единственным образом: бочонки 10, 20 и 30 восстанавливаются по нулям, после этого 1 и 2 тоже выделяются однозначно.

Первая часть — это число, состоящее из цифр 7, 5, 3, которые нестрого убывают. Возможные неоднозначности при разбиении на бочонки возникают только из-за $75 = 7|5$ и $53 = 5|3$. Так как нам нужны разбиения одинаковой длины, есть только варианты $75|3 = 7|53$ (с добавлением одного из 5 бочонков во вторую часть) и $75|5|3 = 7|5|53$ (с пустой второй частью). Поэтому для ответа надо вычесть 6 из количества способов выбрать бочонки.

Критерии. За указание, какие наборы бочонков подходят, ставится 1 балл, ещё 2 балла добавляются за подсчёт количества способов выбрать бочонки. Все найденные варианты с неоднозначным разложением на бочонки оцениваются в 2 балла (1 балл, если найден хотя бы один из них).

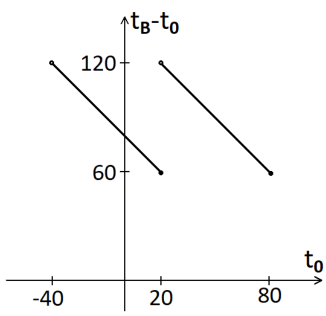
5. На плане показан перекрёсток Горизонтальной и Вертикальной улиц (сторона клетки равна 5 метрам, переходы показаны пунктиром). Сигналы светофоров чередуются с периодом 2 минуты по следующему графику:
   - 40 секунд горит зелёный для пешеходов, переходящих Горизонтальную улицу;
   - далее 20 секунд для всех пешеходов красный;
   - следующие 40 секунд — зелёный для переходящих Вертикальную улицу;
   - и последние 20 секунд — снова красный для всех пешеходов.

   Егор ходит со скоростью 1 м/с. В случайный момент времени он оказывается в точке A, откуда наиболее быстрым способом, не нарушающим правил, переходит в точку B. При этом Егор видит, сколько времени осталось до смены цвета на каждом светофоре, и не начинает переходить через дорогу, если не успеет завершить переход. Сколько секунд в среднем пройдёт, прежде чем Егор попадёт в точку B? (*А. А. Теслер*)



Ответ: 90 секунд.

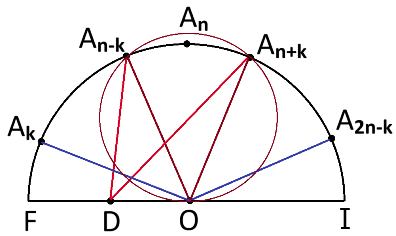
Решение. Пусть в момент времени $t = 0$ (в секундах) зажигается зелёным светофор через Горизонтальную улицу. Тогда если начальное время $-40 < t_0 \leqslant 20$, то Егор успевает перейти Горизонтальную улицу к моменту $t_1 \in [10; 40)$, начинает переходить вертикальную при $t = 60$ и приходит в точку B в момент $t_B = 80$. Получается, что он затратил от 120 до 60 секунд, причём поскольку зависимость линейная (см. график), то среднее время равно 90 секунд. При $20 < t_0 \leqslant 80$ всё то же самое, только улицы переходятся в другом порядке, и среднее в этом промежутке тоже 90 секунд. Далее всё повторяется, поскольку период чередования сигналов — 120 секунд.



6. На отрезке FI как на диаметре построена полуокружность, точками $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ разделённая на равные дуги ($n > 2$). На отрезке отметили точку D, и оказалось, что при некотором k ($1 \leqslant k < \frac{n}{2}$) синусы углов A_kDA_{2n-k} и $A_{n-k}DA_{n+k}$ равны. Докажите, что D — середина FI. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Углы заведомо не могут быть равны ($k < n - k$, поэтому второй угол лежит внутри первого). Значит, равенство синусов означает, что углы в сумме дают 180°. Обозначим середину отрезка FI через O и заметим, что угол A_kOA_{2n-k}, как центральный, равен $2n-2k$ дугам, а угол $A_{n-k}OA_{n+k}$ — $2k$ дугам, то есть в сумме они дадут всю полуокружность, и, тем самым, будут равны $180°$.

Покажем теперь, что если точка D не совпадает с O, то сумма будет заведомо меньше $180°$ (и, тем самым, их синусы не будут равны). Построим описанные окружности треугольников A_kOA_{2n-k} и $A_{n-k}OA_{n+k}$ (на рисунке показана вторая из них). Так как луч $OA_n \perp FI$, то центры обеих окружностей будут лежать на отрезке OA_n, а отрезок FI будет их касаться (при этом центральные углы больших окружностей станут вписанными для маленьких).



Но точка D заведомо вне построенных окружностей, и каждый из рассматриваемых углов будет меньше соответствующего вписанного угла с вершиной в O.

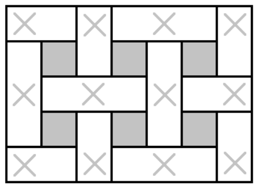
Критерии. За упоминание того, что углы не могут быть равны, даётся 2 балла.

7. Можно ли разрезать квадрат 100×100 по границам клеток на 2024 прямоугольника так, чтобы объединение никакого набора от 2 до 2023 прямоугольников не являлось прямоугольником?

(А. А. Теслер)

Ответ: да.

Решение. Приведём одну из возможных конструкций. Рассмотрим прямоугольник $(2n+1)\times(2m+1)$ с нечётными сторонами, где $nm \geqslant 2$. Разобьём его на прямоугольники 1×1, 1×2, 1×3, 2×1, 3×1 как на рисунке (где $n=2$ и $m=3$), то есть вырежем квадратики на пересечении строк и столбцов с чётными номерами (показаны серым), а между соседними такими квадратиками расположим прямоугольники 1×3 и 3×1 чередующимся образом (прямоугольники из двух клеток получаются при обрезании границами большого прямоугольника). Заметим, что полученные кусочки (кроме квадратов) находятся во взаимно однозначном соответствии с клетками, отмеченными крестиком. Поэтому всего имеется $nm+(n+1)(m+1)$ кусочков.



Более того, при ограничении $nm \geqslant 2$ нет никакого прямоугольника, целиком состоящего из получившихся маленьких прямоугольников, отличного от них и от всего большого прямоугольника. Действительно, если он содержит квадратик, то он содержит и какого-то его соседа, а тогда он содержит всех его соседей и ближайшие квадратики. Если же он содержит какой-то прямоугольник, то легко проверить, что он тогда содержит и соседний с ним квадратик.

При $\{n,m\}=\{28,35\}$ получится 2024 прямоугольника, причём $2n+1$ и $2m+1$ не больше 100. Теперь в получившемся разрезании расширим первые строку и столбец до нужной ширины, чтобы получить требуемое разрезание квадрата 100×100.

Критерии. Если не доказывается, что приведённый пример удовлетворяет условиям, то ставится не больше 5 баллов.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 11 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Решите уравнение $[x]^2+2\{x\}^2=2x^2$. (Здесь $[x]$ и $\{x\}$ — целая и дробная части x.) (*С. П. Павлов*)

Ответ: $x \in \{-2{,}25, -1{,}5, -0{,}75\} \cup [0,1)$.

Решение. Введём обозначения $y=[x]$ и $z=\{x\}$, тогда y — целое число, $0 \leqslant z < 1$, и из уравнения получается $y(y+4z)=0$. Если $y=0$, то подходит любое z из полуинтервала. Если же $0 \neq y = -4z$, то $y \in \{-3,-2,-1\}$ и в каждом случае получается единственное решение.

Критерии. Если участник считает, что целая часть — это результат округление до ближайшего целого (а не вниз) и $\{x\} = x-[x]$, то за в остальном полное решение (с ответом $x \in (-1,1)$) ставится 2 балла.

2. Костя и Маша по очереди ставят в клетки доски 8×8 числа $+1$ и -1 (начинает Костя) по следующим правилам:
   - перед каждым ходом игрок выбирает число и цвет (красный, зелёный или синий), которым напишет выбранное число в произвольной свободной клетке доски;
   - если после хода игрока сумма чисел выбранного им цвета оказалась равной нулю, этот игрок автоматически считается проигравшим;
   - после заполнения доски подсчитываются суммы чисел каждого цвета: если произведение этих сумм положительно, то побеждает Костя, а если отрицательно — то Маша; если какой-либо цвет так и не был использован, он не участвует в подсчёте.

Кто может обеспечить себе победу и как для этого необходимо действовать? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: Маша может обеспечить себе победу.

Стратегия. Допустим, Костя первым ходом поставил $+1$ синим цветом. Это означает, что сумма синих чисел всегда будет положительна (чтобы это изменить, кому-то из игроков придётся сперва сделать её равной нулю, что автоматически считается поражением). Поэтому Маше ничего не остаётся, кроме как повторять Костины ходы в том же цвете, до тех пор, пока Костя не решит поставить какое-либо число *вторым цветом*, после чего ей останется поставить *третьим цветом* поставить число так, чтобы в итоге в одном или трёх цветах оказалась отрицательная сумма (что и обеспечит отрицательное произведение). После этого ход игры не имеет значения, Маше достаточно следить, чтобы её ходы не обнуляли сумму в каком-либо из цветов.

Единственным исключением является ситуация, если Костя так никогда и не поставит число вторым цветом. В этой ситуации Маше надо будет последним ходом поставить число вторым цветом так, чтобы ровно в одном из двух цветов сумма оказалась отрицательна.

Если же Костя первым ходом поставил -1, то Маша действует точно также: при добавлении второго цвета она добавляет третий с нужным знаком, а иначе последним ходом ставит $+1$ другим цветом.

Критерии. За замечание, что сумма чисел одного цвета определяется первым слагаемым, ставится 2 балла. За стратегию в исключительном случае даётся 1 балл. Если стратегия описана, но забыто исключение, то за задачу ставится не больше 5 баллов.

3. Назовём *униквадратной* дробь вида $\dfrac{1}{n^2}$, где n — натуральное число. Найдите максимальную униквадратную дробь, представимую в виде суммы двух униквадратных дробей. (*С. П. Павлов, А. А. Теслер*)

Ответ: $\dfrac{1}{144}$ (представима в виде $\dfrac{1}{12^2} = \dfrac{1}{15^2} + \dfrac{1}{20^2}$).

Решение. Пусть $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$, тогда $p^2q^2 = p^2n^2 + q^2n^2$. Другими словами, (pn, qn, pq) является пифагоровой тройкой. Обозначим через g наибольший общий делитель чисел pn и qn. Тогда g делит pq, $(a, b, c) = (\frac{pn}{g}, \frac{qn}{g}, \frac{pq}{g})$ является примитивной пифагоровой тройкой (из попарно взаимно простых чисел), $n = \sqrt{\frac{gab}{c}}$, $p = \sqrt{\frac{gac}{b}}$, $q = \sqrt{\frac{gbc}{a}}$. Так как под корнями должны быть целые числа и a, b, c попарно взаимно просты, то все три числа a, b, c делят g.

Так как a или b делится на 3 (иначе c^2 давало бы остаток $a^2+b^2 \equiv 2$ по модулю 3, что невозможно), то n тоже делится на 3. Кроме того, a или b делится на 4 (иначе a^2+b^2 давало бы остаток 1 или 5 по модулю 8, но они не являются остатками точных квадратов), поэтому n делится на 4 (выражение под корнем делится на 4 благодаря a или b и ещё на 4 благодаря g). Следовательно, $n \geqslant 12$, и случай $n = 12$ реализуется при $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $g = 60$, $p = 15$, $q = 20$.

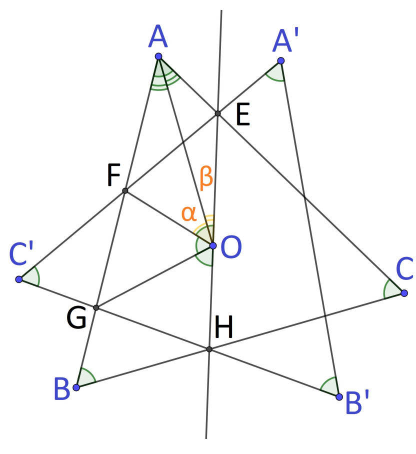
Критерии. За пример ставится 3 балла, за оценку — 4.

4. Через центр бумажного равностороннего треугольника площади 1 проведена прямая, не проходящая через вершину. Если согнуть треугольник по этой прямой, то некий четырёхугольник окажется покрыт дважды. Какова минимально возможная площадь этого четырёхугольника?
(Л. С. Корешкова)

Ответ: 1/3.

Решение. Обозначим вершины треугольника через A, B, C так, что прямая отделяет AB от C, симметричные им точки — это A', B', C'. Точки пересечения AC с $A'C'$, AB с $A'C'$, AB с $B'C'$, BC с $B'C'$ обозначим E, F, G, H соответственно (см. рис.).

Надо найти минимум площади $EFGH$. Заметим, что треугольники OEF, OFG, OGH равны: OEF и OGH получаются из OFG отражением относительно EH и поворотом на $120°$ в разные стороны. Поэтому достаточно найти минимум площади OEF. Обозначим через α и β углы FOA и EOA и заметим, что площадь OEF пропорциональна $|OF| \cdot |OE|$.



Так как $|OA|$ и углы OAF, OAE постоянны, то по теореме синусов $|OF|$ пропорционально

$$\frac{1}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6} - \alpha\right)} = \frac{1}{\cos(\beta)},$$

аналогично $|OE|$ пропорционально $1/\cos(\alpha)$. Так как $\alpha + \beta = \pi/3$, удобно ввести переменную $\gamma = \alpha - \pi/6$.
Итого, $\alpha = \gamma + \pi/6$, $\beta = \gamma - \pi/6$, γ может принимать значения от $-\pi/6$ до $\pi/6$ не включительно, и нас интересует максимум выражения

$$\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\gamma - \frac{1}{4}.$$

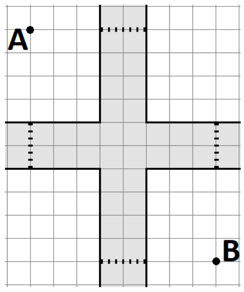
Он достигается при $\gamma = 0$ (то есть $OE \parallel AB$), это даёт минимальную площадь 1/3.

Критерии. За пример даётся 2 балла, за оценку — 5.

5. На плане показан перекрёсток Горизонтальной и Вертикальной улиц (сторона клетки равна 5 метрам, переходы показаны пунктиром). Сигналы светофоров чередуются с периодом 2 минуты по следующему графику:

- 40 секунд горит зелёный для пешеходов, переходящих Горизонтальную улицу;

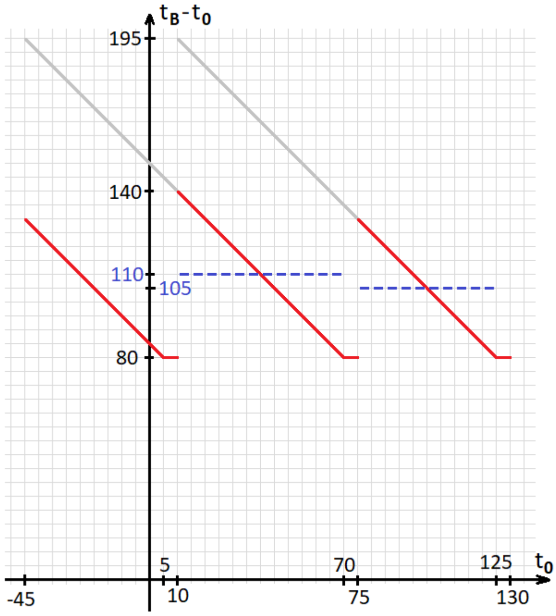
- далее 20 секунд для всех пешеходов красный;
- следующие 40 секунд — зелёный для переходящих Вертикальную улицу;
- и последние 20 секунд — снова красный для всех пешеходов.



Егор ходит со скоростью 1 м/с. В случайный момент времени он оказывается в точке A, откуда наиболее быстрым способом, не нарушающим правил, переходит в точку B. При этом Егор видит, сколько времени осталось до смены цвета на каждом светофоре, и не начинает переходить через дорогу, если не успеет завершить переход. Сколько секунд в среднем пройдёт, прежде чем Егор попадёт в точку B? *(А. А. Теслер)*

Решение. Пусть в момент времени $t = 0$ (в секундах) зажигается зелёным светофор через Горизонтальную улицу. Посчитаем, сколько секунд потратит Егор в зависимости от времени выхода t_0. Заметим, что до первого и после второго перехода Егору будет быстрее всего идти по отрезкам, параллельным улицам, а между двумя переходами — по гипотенузе, на которую он затратит $\sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ секунд. Подходя к дороге, Егору надо дождаться подходящего времени для перехода ($120n \leqslant t \leqslant 120n + 30$ для Горизонтальной улицы и $120n + 60 \leqslant t \leqslant 120n + 90$ для Вертикальной).

Возможны следующие случаи (включая те, где Егор переходит дороги в неоптимальном порядке).



- Егор сначала перейдёт Вертикальную улицу, причём ему не надо будет ждать светофора ни при первом переходе ($120n + 45 \leqslant t_0 \leqslant 120n + 75$), ни при втором ($120m - 50 \leqslant t_0 \leqslant 120m - 20$). Тогда ему понадобится 80 секунд, а t_0 лежит в интервале $120n + 70 \leqslant t_0 \leqslant 120n + 75$.
- Егор сначала перейдёт Вертикальную улицу и ему не придётся ждать первый светофор, зато придётся ждать второй. Тогда ему понадобится от 105 до 80 секунд. При этом t_0 лежит в промежутке $120n + 45 \leqslant t_0 < 120n + 70$ и время движения зависит от t_0 линейно в каждом периоде.
- Егор сначала перейдёт Вертикальную улицу, но ему придётся ждать оба светофора. Он потратит от 195 до 105 секунд в линейной зависимости от $t_0 \in (120n - 45; 120n + 45)$.
- Если Егор сначала перейдёт Горизонтальную улицу и ему не надо ждать светофоров, то он потратит 80 секунд и $120n + 5 \leqslant t_0 \leqslant 120n + 10$.
- Егор сначала перейдёт Горизонтальную улицу и будет ждать только на втором светофоре, тогда ему понадобится от 105 до 80 секунд в линейной зависимости от $t_0 \in [120n - 20; 120n + 5)$.
- Егор сначала перейдёт Горизонтальную улицу и будет ждать у обоих светофоров, тогда ему понадобится от 195 до 105 секунд в линейной зависимости от $t_0 \in (120n + 10; 120n + 100)$.

Найдём среднее значение в промежутке $t_0 \in (120n + 5; 120n + 125)$. Так как Егор действует оптимально, ему понадобится 80 секунд при $120n + 5 \leqslant t_0 \leqslant 120n + 10$, от 140 до 80 секунд при $120n + 10 \leqslant t_0 \leqslant 120n + 70$ (в среднем 110 секунд, так как зависимость линейная), 80 секунд при $120n + 70 \leqslant t_0 \leqslant 120n + 75$, от 130 до 80 секунд при $120n + 75 \leqslant t_0 \leqslant 120n + 125$ (в среднем 105, т. к. зависимость линейная).

Итого в среднем понадобится $\dfrac{80 \cdot 5 + 110 \cdot 60 + 80 \cdot 5 + 105 \cdot 50}{120} = \dfrac{1265}{12} = 105\frac{5}{12}$ секунд.

Критерии. Если в решении предполагается, что Егор ходит только по горизонтали и вертикали, и в целом задача решена верно (ответ — $107\frac{1}{12}$ секунд), то даётся 2 балла.

6. В школе, где учится Алиса, ставят отметки 1, 2, 3, 4 и 5. Алиса за первую четверть получила ровно 60 отметок. Перемножив их, она получила число, сумма цифр которого равна 12. Каково максимально возможное среднее арифметическое Алисиных оценок? *(А. А. Теслер)*

Ответ: 4,65.

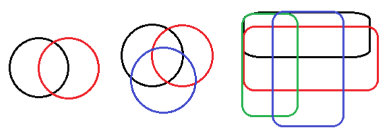
Решение. Полученное Алисой произведение имеет сумму цифр 12, значит, оно делится на 3, но не на 9. В таком случае оно имеет вид $3 \cdot 2^b \cdot 5^c$. Его десятичная запись начинается либо с числа $3 \cdot 5^n$ (при $n = c - b \geqslant 0$), либо с числа $3 \cdot 2^{-n}$ (при $n = c - b < 0$), а далее идут нули. Рассмотрим первый случай. При $n = 2$ сумма цифр действительно равна 12 (при $n = 0$ и $n = 1$ — нет). Если $n > 2$, то 5^n заканчивается на 25 (легко доказать индукцией по n), а $3 \cdot 5^n$ — на 75. Но перед 75 есть ещё какие-то цифры, поэтому сумма цифр больше 12. Итак, этот случай реализуется только при $n = 2$. Тогда три из оценок равны 3, 5, 5. Произведение остальных 57 оценок можно сделать равным степени десятки: например, если среди них 38 пятёрок и 19 четвёрок, то оно равно 10^{38}. В этом случае среднее арифметическое равно $(3 + 19 \cdot 4 + 40 \cdot 5) : 60 = 4{,}65$. Чтобы ещё увеличить среднее, нужно увеличить количество пятёрок (так как от тройки избавиться невозможно), но тогда в разложении увеличится степень пятёрки (c) и уменьшится степень двойки (b), то есть будет $n = c - b > 2$. По той же причине при среднем, большем 4,65, невозможен второй случай (где $b > c$).

Критерии. За указание того, что число имеет такое разложение на простые, даётся 2 балла. За пример даётся 3 балла.

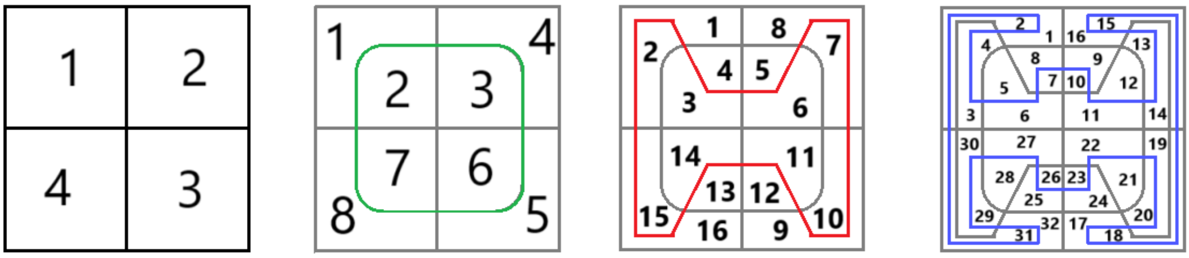
7. У Испытателя есть Полигон в виде квадрата. В известной точке Полигона находится Источник, испускающий 10 типов излучений, которые распространяются по прямым и кривым траекториям, но не могут пересекать загородки (для каждого излучения свой вид загородки). Излучения делятся на полезные и вредные (возможно, все 10 полезны или все 10 вредны), причём Испытатель не знает, какие излучения полезны. Благоприятна для жизни та зона, в которую проникают все полезные излучения и не проникают вредные.
Испытатель готовится к эксперименту: он устанавливает 10 загородок (по одной каждого типа) так, чтобы каждая загородка делила Полигон на две части. После этого он включит Источник, и эксперимент начнётся. Испытатель хочет, чтобы благоприятная зона оказалась связной (то есть не состояла из нескольких отдельных частей), а её площадь составляла $\frac{1}{1024}$ от площади квадрата. Может ли он установить загородки так, чтобы гарантировать это? Две загородки могут пересекаться лишь в конечном числе точек; проводить загородку через Источник нельзя. (*А. А. Теслер*)

Ответ: да, может.

Примечание. Широко известный математический объект — диаграммы Эйлера–Венна для n множеств при малых n (см. рисунок справа). Из решения этой задачи следует, что такие диаграммы возможны для произвольного n.



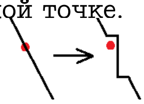
Решение. Будем строить загородки так, как показано на рисунке ниже. Первые две из них соединяют середины противоположных сторон Полигона и делят его на 4 зоны. Каждая следующая загородка — замкнутая линия, которая проходит через каждую из зон, образованных предыдущими загородками, и делит её на две равновеликих части. Чтобы провести такую линию по всем зонам, нужно пронумеровать их так, чтобы каждые две зоны с соседними номерами (а также последняя и первая) имели общий участок границы. Построим такую нумерацию по индукции (после k проведённых загородок нужно пронумеровать зоны от 1 до 2^k). При $k = 2$ пронумеруем зоны «по кругу» от 1 до 4. При добавлении очередной загородки будем делить зону a на новые зоны $2a - 1$ и $2a$, причём если a нечётно, то зона $2a - 1$ будет вне новой загородки, а $2a$ — внутри, а если чётно, то наоборот. В результате две новых зоны с соседними номерами будут либо половинками одной старой зоны, либо половинками соседних старых зон, не разделёнными новой загородкой (то есть по-прежнему соседними). Зона с номером 2^k всё время будет вне новых загородок (как *вторая* половина зоны с *чётным* номером 2^{k-1}), как и зона номер 1 (как *первая* половина зоны с *нечётным* номером 1), то есть они будут оставаться соседними.



k=2 k=3 k=4 k=5

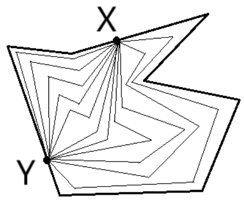
Разумеется, мы будем проводить загородки трансверсально (то есть в точке пересечения первая из пересекающихся загородок переходит по другую сторону от второй — нет касания или общих фрагментов ненулевой длины). Также нетрудно избегать пересечения трёх загородок в одной точке.

Если окажется, что одна из загородок проходит через Источник, то можно сдвинуть её, компенсировав изменение площади где-нибудь рядом (см. рисунок).



Число зон каждый раз удваивается, поэтому после проведения 10 перегородок мы получим 1024 куска. Благоприятная зона соответствует набору из 10 ответов на вопросы «Нужно ли отделяться от источника перегородкой номер i?». Ответ на каждый вопрос уменьшает количество подходящих кусков вдвое, то есть после 10 вопросов останется как раз одним кусок. Итак, благоприятная зона связна.

Осталось понять, почему любую зону можно разбить на две равновеликих части (тогда после 10 разбиений площадь каждой зоны станет как раз равна $\frac{1}{1024}$ от общей). Причина продемонстрирована на рисунке справа: по мере сдвига границы слева направо площадь левой части непрерывно возрастает, поэтому существует момент, когда она станет равна половине площади всей фигуры.



На самом деле многие геометрические соображения, использованные нами, не вполне строги, хотя и интуитивно очевидны. Например, не очень понятно, что значит «площадь левой части непрерывно возрастает» (в школьном курсе изучаются лишь непрерывные функции одной переменной — о какой функции тут идёт речь?). Да и вообще неясно, что такое площадь произвольной фигуры. Поэтому будем проводить загородки исключительно в виде ломаных линий (понятие площади многоугольника считаем известным). Ниже доказывается ключевое геометрическое утверждение, использованное в решении.

Теорема. Для любого многоугольника P и двух различных точек X, Y на его границе можно провести простую ломаную L с концами в X и Y, у которой все остальные точки лежат строго внутри P, площади получившихся двух многоугольников равны, и при этом L не проходит через заданную точку Z внутри P.

Доказательство: индукция по количеству вершин P, к которым также отнесём сами точки X и Y (если они лежат на сторонах). В случае, когда P является треугольником, а X и Y — его вершинами, в качестве L можно взять двухзвенную ломаную с промежуточной вершиной в середине чевианы из третьей вершины P (чевиана выбирается так, чтобы получившаяся ломаная не прошла через Z).

В общем случае утверждается, что найдутся такие (различные) вершины A и B многоугольника P, что все внутренние точки отрезка AB лежат строго внутри P, причём X и Y лежат на разных дугах границы P (или совпадают с A или B). Если это удастся доказать, то можно разрезать многоугольник этим отрезком (у каждого из них будет строго меньше вершин) и применить предположение индукции к парам точек (X, C) и (C, Y) для подходящей $C \in AB$ (отличной от Z).

Посмотрим на соседние вершины E, F с вершиной X. Если в треугольнике XEF нет других вершин многоугольника (и $X \notin EF$), то можно взять $A = E$, $B = F$. Если там есть другие вершины (и всё ещё $X \notin EF$), то возьмём $A = X$ и в качестве B выберем вершину P из этого треугольника, которая дальше всего от EF, но при этом отлична от X. Наконец, если $X \in EF$, то возьмём $A = X$ и в качестве B выберем подходящую вершину P, которая по ту же сторону от EF, что и сам многоугольник P в малой окрестности точки X (найдётся такая вершина, которая видна из X, то есть что внутренние точки AB лежат внутри P).

Критерии. Если приведена комбинаторная конструкция, но не доказывается технический факт о возможности получения равных площадей, то ставится 5 баллов (доказательства в духе «можно взять дугу границы многоугольника и непрерывно деформировать её в другую, в какой-то момент площадь будет нужная» достаточно).