Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024–2025 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 8 класса

8.1. (7 баллов) На дне аквариума, заполненного водой, находятся два стальных кубика, положенных друг на друга. Длины ребер кубиков – $L_1 = 10$ см, $L_2 = 5$ см, глубина аквариума Н $= 30$ см, плотность стали $\rho = 7900$ кг/м^3 , плотность воды - $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Вычислить силу давления конструкции на дно аквариума в случаях, когда:

[1] Первый кубик лежит на дне

[2] Второй кубик лежит на дне.

Замечание. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2. (*А.А.Черенков*)

Ответ: 100.

Ответ: 90.

Решение. 1) Сила давления конструкции на дно аквариума есть вес конструкции Р, который по третьему закону Ньютона равняется силе реакции N аквариума

По второму закону Ньютона равнодействующая всех действующих на конструкцию сил равна нулю, так как система в равновесии:

$$0 = m_1g + m_2g + F_1 + F_2 - N,$$

где F_2 - давление воды на верхнюю грань кубика с ребром L_2, F_1 - давление воды на ту часть верхней грани кубика с ребром L_1, которая не находится в контакте со вторым кубиком. Таким образом :

$$N = m_1g + m_2g + F_1 + F_2$$

Вычислим :

$$F_1 = p_1S_1 = \rho_0 g(H - L_1)(L_1^2 - L_2^2)$$
$$F_2 = p_2S_2 = \rho_0 g(H - L_1 - L_2)L_2^2$$

Тогда после подстановки получим, что

$$P = N = (L_1^3 + L_2^3)\rho g + \rho_0 g(HL_1^2 - L_1^3 - L_2^3) = 108H$$

2)Сила давления конструкции на дно аквариума есть вес конструкции Р, который по третьему закону Ньютона равняется силе реакции N аквариума.

По второму закону Ньютона равнодействующая всех действующих на конструкцию сил равна нулю, так как система в равновесии:

$$0 = m_1g + m_2g + F_1 - F_2 - N,$$

где F_1 - давление воды на верхнюю грань кубика с ребром L_1, F_2 - давление воды на ту часть нижней грани кубика с ребром L_1, которая не находится в контакте со вторым кубиком. Таким образом :

$$N = m_1g + m_2g + F_1 - F_2$$

Вычислим :

$$m_1g + m_2g = (V_1 + V_2)\rho g = (L_1^3 + L_2^3)\rho g$$
$$F_1 = \rho_1S_1 = \rho_0 g(H - L_1 - L_2)L_1^2$$

$$F_2 = p_2 S_2 = \rho_0 g(H - L_2)(L_1^2 - L_2^2)$$

Тогда после подстановки получим, что

$$P = N = (L_1^3 + L_2^3)\rho g + \rho_0 g(HL_2^2 - L_1^3 - L_2^3) = 85{,}1H$$

Так как минимальное число значащих цифр в условии равно единице, то проводим округление.

8.2. (6 баллов) Вадим экспериментирует с сообщающимися сосудами, которые имеют диаметры $D_1 = 15$ см и $D_2 = 10$ см. Сначала Вадим заполняет сосуды водой и измеряет уровень жидкости в них. Затем он кладет деревянный кубик массой m = 500 г в первый сосуд и снова измеряет уровень жидкости. Далее Вадим перекладывает кубик во второй сосуд и повторяет измерения. На сколько будут отличаться эти измерения по сравнению с первоначальным уровнем воды в сосудах

[3] в первом случае,

[4] во втором случае?

Замечание. Плотность воды - $\rho = 1000$ кг/м^3. *(А.А. Черенков)*

Ответ: 0.020 (допустим ответ: 0.02).

Ответ: 0.020 (допустим ответ: 0.02).

Решение. Так как плотность дерева меньше плотности воды, то кубик будет плавать в воде. Вычислим объем V погруженной части кубика. Запишем второй закон Ньютона для равновесия кубика:

$$F_{Arh} - mg = 0$$

с учетом $F_{Arh} = \rho g V$, получим:

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Ясно, что при погружении кубика в сосуды уровень воды в них меняется на одинаковую величину Δh, чтобы гидростатическое давление компенсировало давление, оказываемое кубиком. Кубик оказывает такое давление, какой оказывает объем вытесненной им жидкости. Таким образом:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{V\rho g}{S_1 + S_2} = \frac{mg}{S_1 + S_2}$$

Это же давление равно изменению гидростатического давления:

$$\frac{mg}{S_1 + S_2} = \rho g \Delta h$$

Откуда

$$\Delta h = \frac{V}{\rho(S_1 + S_2)} = \frac{4m}{\rho\pi(D_1^2 + D_2^2)} \approx 2\text{см}$$

Так как проведенные рассуждения верны при помещении кубика в любой из сосудов, то уровень жидкости в обоих случаях изменится на одинаковую величину.
Так как наименьшее количество значащих цифр равно двум и ответ необходимо записать в системе СИ (единицы - метры), то ответ 0,020 м.

8.3. (6 баллов) В калориметре холодная и теплая вода разделены перегородкой. Масса холодной воды $m_1 = 200$ г, а ее температура $t_1 = 3^o$ С. Теплая вода имеет массу $m_2 = 300$ г и температуру $t_2 = 10^o$ С. В некоторый момент перегородку убрали.

[5] На сколько процентов изменится полный объем, занимаемый жидкостями, после выравнивая температур?

Замечание. Коэффициент температурного расширения принять равным $\alpha = 0{,}0002\ K^{-1}$. Плотность воды при нормальных условиях $\rho = 1000$ кг/м^3. *(А.А. Черенков)*
Ответ: 0.
Решение. 1) Составим уравнение теплового баланса и найдем равновесную температуру:

$$cm_1(t - t_1) = cm_2(t_2 - t)$$

Преобразуем:

$$m_1t_1 + m_2t_2 = (m_1 + m_2)t$$

2) Найдем объемы жидкостей до и после выравнивания температур. Тогда исходные объемы жидкостей:

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_1}{\rho_0}(1 + \alpha t_1), V_2 = \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{m_2}{\rho_0}(1 + \alpha t_2),$$

где ρ_1,ρ_2 - начальные плотности холодной и теплой воды соответственно, ρ_0 - плотность воды при нормальных условиях. Суммарный объем, занимаемый водой:

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{\rho_0}((m_1 + m_2) + \alpha(m_1t_1 + m_2t_2))$$

Аналогично объемы жидкостей после установления теплового равновесия:

$$\tilde{V}_1 = \frac{m_1}{\rho_0}(1 + \alpha t), \tilde{V}_2 = \frac{m_2}{\rho_0}(1 + \alpha t)$$

И их суммарный объем:

$$\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 = \frac{1}{\rho_0}((m_1 + m_2) + \alpha(m_1 + m_2)t)$$

Подставим $(m_1 + m_2)t = m_1t_1 + m_2t_2$, получим:

$$\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 = \frac{1}{\rho_0}((m_1 + m_2) + \alpha(m_1t_1 + m_2t_2)) = V_1 + V_2$$

Таким образом, объем, занимаемый жидкостями, не изменится.

8.4. (7 баллов) Мощность двигателя автомобиля Лада Веста N = 90 лошадиных сил, а КПД $\eta = 25$ %.

[6] Какое минимальное количество литров бензина надо залить на заправке, чтобы проехать s = 200 км с постоянной скоростью v = 72 км/ч.

Замечание. Плотность бензина $\rho = 0.76$ г/см^3, удельная теплота сгорания бензина q = $4.6 * 10^7$ Дж/кг. Принять одну лошадиную силу равной 735 Вт. *(А.А. Черенков)*
Ответ: 76.
Решение. 1) Работа, которую совершает двигатель при перемещении на расстояние s:

$$A = Fs = Fvt = N\frac{s}{v}$$

2) Найдем полезную работу, совершаемую двигателем:

$$A = \eta Q = \eta qm = \eta q\rho V$$

3) Тогда получаем:

$$Ns/v = \eta q\rho V$$

Откуда:

$$V = Ns/vq\rho\eta \approx 75.7\text{л}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно двум, то округляем и ответ 76 л.

8.5. (5 баллов) В школьной лаборатории изучают равновесие твердых тел в жидкостях. Для этого учитель взял пустой стакан цилиндрической формы и аккуратно погрузил его дном кверху и отпустил. При этом стакан оказался в положении равновесия.

[7] Какой объем воды оказался в стакане?

Замечание. Стакан имеет высоту H = 15 см, диаметр D = 5 см и массу m = 0.1 кг.

(А.А. Черенков)

Ответ: 0.0002.

Решение. 1)Стакан находится в равновесии, поддерживаемый архимедовой силой воздуха в стакане, получаем:

$$mg = \rho V_1 g,$$

где V_1 - объем, занимаемый воздухом. Таким образом:

$$V_1 = \frac{m}{\rho}$$

2) Тогда объем воды в стакане:

$$V = V_0 - V_1 = \frac{\pi D^2}{4} H - \frac{m}{\rho} \approx 194.5\text{см}^3$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице и ответ необходимо дать в системе СИ, то ответ 0.0002 м^3.

8.6. (7 баллов) Полый алюминиевый шар (внешний радиус R = 10 см, внутренний - r = 9 см) плавает на поверхности воды.

[8] Веществом какой максимальной плотности можно заполнить внутренность шара, чтобы он все еще плавал в жидкости?

Замечание. Плотность алюминия ρ_1 = 2700 кг/м^3, плотность воды ρ = 1000 кг/м^3.

(А.А. Черенков)

Ответ: 400.

Решение. 1) Пусть в шар залито вещество максимальной плотности ρ_2. Тогда шар будет целиком погружен в воду, причем архимедова сила уравновешивает силу тяжести:

$$\rho g V = m_1 g + m_2 g$$

$$\rho g V = \rho_1 g (V - V_0) + \rho_2 g V_0$$

где V_0 и V- внутренний и внешний объемы соответственно.

Тогда получаем:

$$\rho_2 = \frac{V\rho - (V - V_0)\rho_1}{V_0} = \frac{V}{V_0}(\rho - \rho_1) + \rho_1 = \frac{R^3}{r^3}(\rho - \rho_1) + \rho_1 \approx 368\text{кг/м}^3$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице и ответ необходимо дать в системе СИ, то ответ 400 кг/м^3 .

8.7. (7 баллов) На дополнительном уроке по физике школьники изучали явление теплового баланса, проводя опыты. Они поместили в сосуд с водой, имеющей общую теплоемкость C = 1550 Дж/К и температуру T = 25^o C, кусок льда массой m = 150 г при температуре $T_1 = -10^o$ C.

[9] Какая установится температура в сосуде после того, как система придет в равновесие?

Замечание. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0.33$ МДж/кг, удельная теплоемкость c = 2.1 кДж/кг $*$ К (*А.А. Черенков*)

Ответ: 0.

Решение. 1) Найдем количество теплоты, необходимое для полного расплавления льда. Теплота, необходимая для нагрева льда:

$$Q_1 = cm\Delta T_1 = 3150\text{Дж}$$

Теплота, необходимая для полной расплавки льда:

$$Q_2 = \lambda m = 49500\text{Дж}$$

Суммарная теплота:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 = 52650\text{Дж}$$

2) Найдем количество теплоты, необхожимое для того, чтобы калориметр с водой остудились до нулевой температуры

$$Q = C\Delta T = 38750\text{Дж}$$

3) Таким образом, лед не успеет целиком расплавиться, но достигнет температуры плавления. То есть итоговая установившаяссся температура - нулевая

8.8. (6 баллов) В школьной лаборатории проводят эксперименты, демонстрирующие теплообмен между телами. Имеется алюминиевый куб, разогретый до некоторой температуры. Этот куб кладут на кусок льда при температуре $t_2 = -20^o$ С и ждут, пока он полностью не погрузится в лед.

[10] Какая при этом должна быть минимальная температура куба?

Замечание. Удельная теплоемкость алюминия $c_1 = 836$ Дж/кг$*$К, плотность $\rho_1 = 2700$ кг/м^3. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0.33$ МДж/кг, удельная теплоемкость $c_2 = 2.1$ кДж/кг$*$К, плотность $\rho_2 = 920$ кг/м^3. (*А.А. Черенков*)

Ответ: 150.

Решение. 1) Куб полностью погрузится в лед, если его теплоты хватит для того, чтобы нагреть и расплавить количество льда, заключенного в объеме, равном объему куба. При этом сам куб охладится до нуля градусов. Тогда уравнение теплового баланса примет вид:

$$\lambda m_2 + c_2 m_2 (0 - t_2) = c_1 t m_1$$

$$m_2 = V\rho_2 = a^3\rho_2 \qquad m_1 = V\rho_1 = a^3\rho_1$$

$$t = \frac{\lambda - c_2 t_2}{c_1}\frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda - ct_2}{c_1}\frac{\rho_2}{\rho_1} \approx 152^oC$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно двум, то проводим округление.

8.9. (5 баллов) В детском лагере вожатые решили научить строить детей малую электростанцию. Для этого они пошли отрядом на речку Черную, которая образует водопад высотой h = 2 м. Речка течет со скоростью v = 3 м/с, а сечение потока у нее s = 3 м^2.

[11] Какую максимальную мощность может развивать водопад?

(*А.А. Черенков*)

Ответ: 200000.

Решение. 1) Мощность потока равна работе, которую может совершать поток в единицу времени при полном переходе его кинетической энергии у основания водопада в работу:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{E_k}{t}$$

2) По закону сохранения энергии:

$$E_k = E_{k0} + \Pi = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

3) Масса воды, проходящей через сечение водопада в единцу времени:

$$m = V\rho = Svt\rho$$

4) Таким образом, находим мощность потока

$$N = \frac{m}{t}(\frac{v^2}{2} + gh) = Sv\rho(\frac{v^2}{2} + gh) = 216900\text{Вт}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, ответ округляем.

Решения задач для 9 класса

9.1. (6 баллов) На одном из практических занятий по физике школьники проводят опыты в лаборатории. У них есть калориметр, в котором лежит кусок льда массой m = 150 г при температуре $t_0 = 0^o$ C, а так же установка, которая подает пар при температуре $t_1 = 100^o$ C в калориметр.

[1] Какую минимальную массу пара необходимо впустить в калориметр, чтобы получить воду при температуре t = 20^o C?

[2] Какая будет масса полученной воды?

Замечание. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0.33$ МДж/кг, удельная теплота парообразования воды l = 2.26 МДж/кг, удельная теплоемкость воды c = 4200 Дж/кг∗K. Теплоемкостью калориметра пренебречь. *(А.А. Черенков)*

Ответ: 0,024.

Ответ: 0,174.

Решение. 1)Лед должен расплавиться и нагреться, а пар конденсироваться и охладиться. Составим уравнение теплового баланса и найдем сколько пара m_0 при этом нужно впустить:

$$\lambda m + cm(t - t_0) = lm_0 + cm_0(t_1 - t)$$

Откуда

$m_0 = \frac{\lambda + c(t-t_0)}{l + c(t_1 - t)} m \approx 24$г (1)

2) Тогда количество воды, оказавшейся в калориметре:

$$M = m_0 + m \approx 174 \text{г}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно двум, то проводим округление в формуле (1). В дальнейшем мы складываем 2 целых числа и дальнейшее округление не требуется. Ответ записывается в единицах системы СИ - килограммах.

9.2. (5 баллов) В школьной лаборатории проводят эксперименты, демонстрирующие теплообмен между телами. Имеется алюминиевый куб, разогретый до некоторой температуры. Этот куб кладут на кусок льда при температуре $t_2 = -20^o$ C и ждут, пока он полностью не погрузится в лед.

[3] Какая при этом должна быть минимальная температура куба?

Замечание. Удельная теплоемкость алюминия $c_1 = 836$ Дж/кг∗K, плотность $\rho_1 = 2700$ кг/м^3. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0.33$ МДж/кг, удельная теплоемкость $c_2 = 2.1$ кДж/кг∗K, плотность $\rho_2 = 920$ кг/м^3 *(А.А. Черенков)*

Ответ: 150.

Решение. 1) Куб полностью погрузится в лед, если его теплоты хватит для того, чтобы нагреть и расплавить количество льда, заключенного в объеме, равном объему куба. При этом сам куб охладится до нуля градусов. Тогда уравнение теплового баланса примет вид:

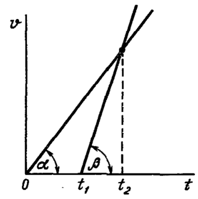
$$\lambda m_2 + c_2 m_2 (0 - t_2) = c_1 t m_1$$

$$m_2 = V\rho_2 = a^3 \rho_2 \qquad m_1 = V\rho_1 = a^3 \rho_1$$

$$t = \frac{\lambda - c_2 t_2}{c_1} \frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda - c t_2}{c_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} \approx 152^o C$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно двум, то проводим округление.

9.3. (5 баллов) Два игрушечных паровозика движутся вдоль одних прямолинейных путей, из одного и того же начального положения. На рисунке представлены графики скоростей паровозиков. Известно, что $t_1 = 5$ с, $t_2 = 10$ с.



[4] В какой момент времени t_3 паровозики встретятся?

(*А.А. Черенков*)

Ответ: 17.

Решение. Из графиков скорости понятно, что паровозики движутся равноускоренно, причем

$$a_1 = \operatorname{tg}\alpha = v_0/t_2, a_2 = \operatorname{tg}\beta = \frac{v_0}{t_2 - t_1},$$

где v_0 - скорость паровозиков в момент времени t_2. Запишем уравнения движения паровозиков вдоль оси ох, введенной по направлению их движения:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{a_1 t^2}{2} \\ x_2(t) = \frac{a_2 (t-t_1)^2}{2} \end{cases}$$

Паровозики встретятся в момент времени t_3, следовательно $x_1(t_3) = x_2(t_3)$. Таким образом, получаем:

$$\frac{a_1 t_3^2}{2} = \frac{a_2 (t_3 - t_1)^2}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} t_3^2 = (t_3 - t_1)^2$$

$$\frac{t_2 - t_1}{t_2} t_3^2 = (t_3 - t_1)^2$$

Решая квадратное уравнение относительно t_3, получим, что

$$t_3 = t_2 \pm \sqrt{t_2(t_2 - t_1)}$$

Учитывая, что $t_3 > t_2$, получаем окончательный ответ:

$$t_3 = t_2 + \sqrt{t_2(t_2 - t_1)} \approx 17c$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то проводим округление в формуле при извлечении корня. В дальнейшем мы складываем 2 целых числа и дальнейшее округление не требуется.

9.4. (6 баллов) Пете подарили радиоуправляемую машинку, которая может ускоряться или замедляться с одинаковым по величине и постоянным ускорением a $= 10$ м/с^2, после чего продолжает двигаться равномерно.

[5] Петя хочет выяснить, какую максимальную скорость V должна развить машинка, чтобы она доехала из одного конца комнаты в другой в кратчайшее время, при условии остановки в конце пути.

Замечание. Длина комнаты L $= 5$ м. (*А.А. Черенков*)

Ответ: 7.

Решение. Время движения машинки τ будет наименьшим, если средняя скорость перемещения машинки будет наибольшей, что очевидно. Последнее, при условиях данной задачи (начало и конец движения происходят с постоянным по модулю ускорением), может быть лишь в случае, если вагонетка будет первую половину пути двигаться с ускорением $+$a, а вторую - с ускорением -a .

Таким образом, можно записать следующие соотношения:

$$\frac{V\tau}{2*2} = \frac{L}{2}, \frac{\tau}{2} = \frac{V}{a}$$

откуда

$$V = \sqrt{La} \approx 7\text{м/с}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то проводим округление до целых.

9.5. (8 баллов) Воздушный шар опускается на Землю с постоянной скоростью u = 2 м/с. В некоторый момент с этого шара вертикально вверх подбрасывают камень с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с относительно Земли.

[6] Какое будет расстояние L между воздушным шаром и камнем, в тот момент, когда камень достигнет наивысшей точки относительно Земли?

[7] На какое наибольшее расстояние L_{max} камень удалится от шара?

[8] Спустя какое время T после броска камень поравняется с шаром?

Замечание. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2 *(А.А. Черенков)*

Ответ: 7.

Ответ: 7.

Ответ: 2.

Решение. 0) Введем неподвижную систему координат связанную с Землей и подвижную, жестко связанную с воздушным шаром. Тогда в подвижной системе координат начальная скорость камня

$$w_0 = v_0 + u$$

а законы движения и изменения скорости имеют следующий вид:

$$\begin{cases} y(t) = w_0 t - \frac{(gt^2)}{2} \\ w(t) = w_0 - gt \end{cases}$$

Относительно же Земли, скорость камня меняется по закону:

$$v(t) = v_0 - gt$$

1) Когда камень достигнет наивысшей точки относительно Земли, его абсолютная скорость будет равняться нулю: $v(t_1) = 0$. Таким образом, найдем t_1:

$$0 = v_0 - gt_1$$

то есть

$$t_1 = \frac{v_0}{g}$$

Подставим это время в уравнение движения камня относительно воздушного шара и найдем L, учитывая, что $w_0 = v_0 + u$:

$$L = y(t_1) = v_0/2g(v_0 + 2u) \approx 7.1\text{м}$$

2) Наибольшее расстояние между камнем и воздушным шаром будет в тот момент t_2, когда относительная скорость камня будет равна нулю, то есть $w(t_2) = 0$, таким образом, находим:

$$0 = w_0 - gt_2$$

то есть

$$t_2 = w_0/g$$

Подставим это время в уравнение движения камня относительно воздушного шара и найдем L, учитывая, что $w_0 = v_0 + u$:

$$L_{max} = y(t_2) = (v_0 + u)^2/2g \approx 7.35\text{м}$$

3) Условие, что камень поровняется с воздушным шаром: $y(T) = 0$. Таким образом:

$$0 = y(T) = w_0 T - \frac{gT^2}{2}$$

Тогда

$$T = \frac{2(v_0 + u)}{g} \approx 2.45\text{с}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то проводим округление до целых.

9.6. (5 баллов) На практическом занятии по физике Ваня изучает параллельное и последовательное соединение проводников. К несчастью, ему попался набор, в котором на двух резисторах стерся номинал. Однако Ваня не растерялся и подключил их сначала параллельно, а затем последовательно к батарее с напряжением 70 В. В первом случае получилось, что суммарная сила протекающего тока $I_1 = 49$ А, а во втором – $I_2 = 10$ А.

[9] Чему равны сопротивления резисторов?

Замечание. Ответы дать через точку с запятой, начиная с наименьшего. (*А.А. Черенков*)
Ответ: 2,0;5,0 (допускается ответ 2;5).
Решение. 1) При параллельном соединении проводников, их общее сопротивление:

$$R_{01} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Тогда закон Ома для участка цепи имеет вид:

$$U = I_1 R_{01}$$

2) При последовательном соединении проводников их общее сопротивление:

$$R_{02} = R_1 + R_2$$

Тогда закон Ома для участка цепи имеет вид:

$$U = I_2 R_{02}$$

3) Получаем систему для определения R_1,R_2:

$$\begin{cases} \frac{U}{I_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{U}{I_2} = R_1 + R_2 \end{cases}$$

Откуда, учитывая что наименьшее количество значащих цифр равно двум, то верный ответ:

$$R_1 = 2{,}0\text{Ом}, R_2 = 5{,}0\text{Ом}$$

9.7. (6 баллов) Полый алюминиевый шар (внешний радиус R = 10 см, внутренний - r = 9 см) плавает на поверхности воды.

[10] Веществом какой максимальной плотности можно заполнить внутренность шара, чтобы он все еще плавал в жидкости?

Замечание. Плотность алюминия $\rho_1 = 2700$ кг/м^3, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

(А.А. Черенков)

Ответ: 400.

Решение. 1) Пусть в шар залито вещество максимальной плотности ρ_2. Тогда шар будет целиком погружен в воду, причем архимедова сила уравновешивает силу тяжести:

$$\rho g V = m_1 g + m_2 g$$

$$\rho g V = \rho_1 g(V - V_0) + \rho_2 g V_0$$

где V_0 и V- внутренний и внешний объемы соответственно.

Тогда получаем:

$$\rho_2 = \frac{V\rho - (V - V_0)\rho_1}{V_0} = \frac{V}{V_0}(\rho - \rho_1) + \rho_1 = \frac{R^3}{r^3}(\rho - \rho_1) + \rho_1 \approx 368\text{кг/м}^3$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице и ответ необходимо дать в системе СИ, то ответ 400кг/м^3 .

9.8. (6 баллов) На занятиях в школьном кружке по физике изучают электрические цепи. К источнику с внутренним сопротивлением r = 2 Ом и ЭДС 10 В подключили сопротивление R = 2*r, а затем второе такое же сопротивление. Причем сначала его поставили параллельно, а потом последовательно.

[11] Найти отношение мощностей, выделяемых на первом резисторе, в первом и втором случае.

(А.А. Черенков)

Ответ: 1,6.

Решение. 1) Рассмотрим параллельное соединение второго проводника. Тогда общее внешнее сопротивление:

$$R_0 = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2} = r$$

По закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0 + r} = \frac{\varepsilon}{2r}$$

2) Рассмотрим последовательное соединение второго проводника. Тогда общее внешнее сопротивление:

$$R_1 = R + R = 2R = 4r$$

По закону Ома для полной цепи:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r} = \frac{\varepsilon}{5r}$$

3) Учтем, что так как сопротивления равны и соединены параллельно, то ток, текущий через сопротивление R, будет равен половине общего тока в цепи: $I_1 = \frac{I}{2} = \frac{\varepsilon}{4r}$

4) Отношение мощностей примет вид:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1^2 R}{I_2^2 R} = \frac{25}{16} = 1{,}6$$

9.9. (7 баллов) Прямолинейный кусок проволоки длиной 30 см (отрезок AB) с удельным сопротивлением $3 * 10^{-8}$ Ом/м разбит точками C, D, E, F так, что CD=DE=EF=FB, AC=2CD. Точки C, D, E, F, B соединены с точкой A отрезками проводов с другими удельными сопротивлениями так, что их сопротивления равны сопротивлению участка AC.

[12] Найти полное сопротивление цепи между точками А и В.

Замечание. Ответ дать в микроОмах. *(А.Б.Яковлев)*
Ответ: 0,0015 (допустим ответ 0.002).
Решение. 1) Сопротивление рассчитывается как

$$R = \rho L,$$

где ρ - удельное сопротивление, L - длина проводника. Тогда ясно, что сопротивления участков CD,DE,EF,FB равны, а сопротивление участка AC в два раза больше. Обозначим:

$$R_{CD} = R_{DE} = R_{EF} = R_{FB} = R, R_{AC} = 2R$$

По условию сопротивления проводов равны:

$$r_{AC} = r_{AD} = r_{AE} = r_{AF} = r_{AB} = R_{AC} = 2R$$

.
2) Чтобы вычислить полное сопротивление проволоки с проводами заметим, что тип их соединения чередуется: R_{AC} и r_{AC} соединены параллельно, они последовательно соединены с R_{CD} , затем все вместе параллельно к r_{AD}, последовательно с R_{DE} и так далее.
Таким образом начнем вычислять общее сопротивления. Для параллельно соединенных R_{AC} и r_{AC} получим, что их общее сопротивление:

$$R_1 = \frac{R_{AC} r_{AC}}{R_{AC} + r_{AC}} = R$$

Этот участок соединен последовательно с R_{CD}, значит общее сопротивление:

$$R_2 = R_1 + R_{CD} = 2R$$

Далее для параллельно подключенного сопротивления r_{AD}, общее сопротивление будет:

$$R_3 = \frac{R_2 r_{AD}}{R_1 + r_{AD}} = R$$

Ясно, что дальнейшие вычисления будут повторять вышеизложенные, таким образом в конце получим, что общее сопротивление проволоки с проводами равняется R
3) Длина участка провода FB равняется 1/6 всей длины провода. Таким образом, получаем:

$$R = \rho \frac{l}{6} = 0{,}0015\text{мкОм}$$

Замечание. Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то допустим и ответ 0,002 мкОм.

Решения задач для 10 класса

10.1. (7 баллов) На производстве для проверки датчика расхода газа проводят испытание. Известно, что по газопроводу, имеющему поперечное сечение S = 5 см^2, течет метан при давлении p = 7 атмосфер и температуре T = 15^o C.

[1] Какую скорость движения газа должен показать исправный датчик, если за время t = 10 мин через сечение трубы проходит m = 15 кг метана?

Замечание. Молярную масса метана принять равной M = 16,04 г/моль. (*А.А.Черенков*)

Ответ: 10.

Решение. 1) Объем газа, протекающего через поперечное сечение газопровода:

$$V = vtS$$

2)Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

3)Таким образом, подставив выражение для объема в уравнение Менделеева-Клапейрона, выразим скорость:

$$v = \frac{mRT}{pMtS} = 10{,}5\text{м/с}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то ответ 10м/с

10.2. (5 баллов) Два сосуда одинакового объема наполнены кислородом и соединены трубкой. Вся система находится при температуре T = 17^o C. В некоторый момент времени один из сосудов начинают нагревать до температуры $T_1 = 27^o$ C, а температуру второго сосуда поддерживают прежней.

[2] Во сколько раз при этом изменится давление в системе?

Замечание. Объемом трубки пренебречь. (*А.А.Черенков*)

Ответ: 1,0 (допустим ответ 1,02).

Решение. 1) Запишем уравнения состояния газов в нагретом и ненагретом сосудах:

$$\begin{cases} pV = \frac{m_1}{M}RT_1 \\ pV = \frac{m_2}{M}RT \end{cases}$$

Где m_1,T_1– масса и температура газа в первом сосуде, m_2,T_2– во втором сосуде.
Откуда

$$\begin{cases} m_1 = \frac{pVM}{RT_1} \\ m_2 = \frac{pVM}{RT} \end{cases}$$

2)Запишем уравнение Менделеева - Клапейрона для газа в сосудах до нагревания:

$$2p_0V = \frac{m_1 + m_2}{M}RT$$

Где p$_0$– давление газа в сосудах
3)Подставим выражения для масс:

$$2p_0 = p(\frac{T}{T_1} + 1)$$

Тогда получим, что отношение давлений:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{2T_1}{T + T_1} = 1{,}02$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно двум, то ответ 1,0 , то есть с заданной точностью выявить разность в давлениях невозможно. Однако исходя из смысла вопроса допустим ответ 1,02.

10.3. (6 баллов) Прямолинейный кусок проволоки длиной 30 см (отрезок AB) с удельным сопротивлением $3 * 10^{-8}$ Ом/м разбит точками C, D, E, F так, что CD=DE=EF=FB, AC=2CD. Точки C, D, E, F, B соединены с точкой A отрезками проводов с другими удельными сопротивлениями так, что их сопротивления равны сопротивлению участка AC.

[3] Найти полное сопротивление цепи между точками A и B.

Замечание. Ответ дать в микроОмах (*А.Б.Яковлев*)

Ответ: 0,0015 (допустим ответ 0.002).

Решение. 1) Сопротивление рассчитывается как

$$R = \rho L,$$

где ρ - удельное сопротивление, L - длина проводника. Тогда ясно, что сопротивления участков CD,DE,EF,FB равны, а сопротивление участка AC в два раза больше. Обозначим:

$$R_{CD} = R_{DE} = R_{EF} = R_{FB} = R, R_{AC} = 2R$$

По условию сопротивления проводов:

$$r_{AC} = r_{AD} = r_{AE} = r_{AF} = r_{AB} = R_{AC} = 2R$$

2) Чтобы вычислить полное сопротивление проволоки с проводами заметим, что тип их соединения чередуется: R_{AC} и r_{AC} соединены параллельно, они последовательно соединены с R_{CD} , затем все вместе параллельно к r_{AD}, последовательно с R_{DE} и так далее.

Таким образом начнем вычислять общее сопротивления. Для параллельно соединенных R_{AC} и r_{AC} получим, что их общее сопротивление:

$$R_1 = \frac{R_{AC} r_{AC}}{R_{AC} + r_{AC}} = R$$

Этот участок соединен последовательно с R_{CD}, значит общее сопротивление:

$$R_2 = R_1 + R_{CD} = 2R$$

Далее для параллельно подключенного сопротивления r_{AD}, общее сопротивление будет:

$$R_3 = \frac{R_2 r_{AD}}{R_1 + r_{AD}} = R$$

Ясно, что дальнейшие вычисления будут повторять вышеизложенные, таким образом, в конце получим, что общее сопротивление проволоки с проводами равняется R

3) Длина участка провода FB равняется $1/6$ всей длины провода. Таким образом, получаем:

$$R = \rho \frac{l}{6} = 0{,}0015 \text{мкОм}$$

Замечание. Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то допустим и ответ 0,002 мкОм.

10.4. (7 баллов) Павел проводит эксперимент, в котором он бросает два одинаковых мячика без начальной скорости с высоты H = 15 м, измеряя их скорости в конце пути и времена падения. На пути одного из мячиков на высоте h = 10 м находится площадка, расположенная под углом $\alpha = 30^o$ к горизонту, от которой мячик упруго отскакивает, а другой мячик падает свободно.

[4] На сколько будут отличаться скорости мячиков в момент падения на Землю?

[5] На сколько будут отличаться их времена падения на Землю?

Замечание. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2. (*А.А. Черенков*)

Ответ: 0.

Ответ: 1,3 (допустим ответ 1).

Решение. 1) Для обоих мячиков выполняется закон сохранения полной механической энергии:

$$mgH = \frac{mv^2}{2}$$

Откуда получаем выражение для скорости:

$$v = \sqrt{2gH}$$

Так как мячики находились на одной высоте, их скорости в конце пути будут одинаковыми, поэтому разность скоростей в конце пути равна нулю.

2)Введем ось оу вертикально вниз, отсчет начинаем с высоты H. Закон движения мячика, на пути которого нет преграды:

$$y_1(t) = \frac{gt^2}{2}$$

В момент падения $y_1(T_1) = H$, где T_1 - полное время движения мячика. Таким образом получаем, что

$$T_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 1.7c$$

Уравнение движения второго мячика до соударения с преградой:

$$y_2(t) = \frac{gt^2}{2}$$

При этом скорость меняется по закону:

$$v_2(t) = gt$$

В момент t_2 удара о преграду мячик будет находиться на высоте h, то есть $y_2(t_2) = H - h$, откуда получаем, что

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \approx 1\text{с}$$

а скорость в этот момент будет равна:

$$v_2(t_2) = g\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \sqrt{2g(H-h)} = v_0$$

При упругом ударе о преграду модуль скорости не меняется, меняется только ее направление. Из геометрических соображений находим, что мячик отразится от преграды под углом

$$\beta = 90^o - 2\alpha = 90^o - 2 * 30^o = 30^o = \alpha$$

Теперь уравнение движения мячика имеет вид:

$$y_2(t) = (H - h) - v_0 \sin \alpha t + \frac{gt^2}{2}$$

В момент τ_2 падения шарика на землю $y_2(\tau_2) = H$. Тогда получаем квадратное уравнение для определения τ_2:

$$H = (H - h) - v_0 \sin \alpha \tau_2 + (g\tau_2^2)/2$$

откуда находим, что

$$\tau_2 = \frac{1}{g}\left(v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gh}\right)$$

Учитывая, что $\tau_2 > 0$, получим:

$$\tau_2 = \frac{1}{g}\left(v_0 \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gh}\right) \approx 2c$$

Таким образом, полное время движения мячика:

$$T_2 = t_2 + \tau_2 \approx 3c.$$

А разность времен равна:

$$\Delta t = T_2 - T_1 \approx 1{,}3c$$

10.5. (6 баллов) Пете снится сон, в котором он находится на необитаемом острове. Чтобы добыть себе пропитание он собирается на охоту, взяв с собой лук. Пройдя в джунгли, Петя заметил на расстоянии L = 10 м от себя дерево, на котором на ветке на высоте H = 5 м сидит обезьяна. Натянув тетиву, Петя выпустил стрелу. Обезьяна, покоившаяся на дереве, от испуга в этот же момент начала падать.

[6] Какой должна быть минимальная скорость стрелы, чтобы Петя попал в обезьяну?

Замечание. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2. *(А.А. Черенков)*
Ответ: 11 (допустим ответ 10).
Решение. 1) Введем неподвижную систему координат, связанную с Землей, в точке, где стоит Петя. Введем также подвижную систему координат, жестко связанную с падающей обезьяной. Рассмотрим в неподвижной системе координат законы изменения скоростей стрелы и обезьяны:

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t \\ \vec{u}(t) = \vec{g}t \end{cases}$$

где $\vec{v}$,$\vec{u}$ – скорости обезьяны и стрелы соответственно. Тогда в подвижной системе координат по закону сложения скоростей скорость стрелы будет вычисляться как:

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{u} = \vec{v}_0 = co\vec{n}st$$

Таким образом, Петя попадет в обезьяну, если будет целиться прямо в нее, при любой достаточно большой скорости. По условию задачи Петя целится прямо в обезьяну. Тогда ясно, что минимальная скорость, при которой Петя попадет в обезьяну будет тогда, когда стрела долетит до обезьяны в тот же момент, что она упадет на Землю.
2)Найдем по теореме Пифагора начальное расстояние от Пети до обезьяны: $l = \sqrt{H^2 + L^2}$. Пусть α - угол, под которым производится выстрел. Тогда $\sin \alpha = \frac{H}{l}, \cos \alpha = \frac{L}{l}$ Запишем уравнения движения стрелы во введенной ранее неподвижной декартовой системе координат:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha t \\ y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Стрела пройдет расстояние L по горизонтали, когда попадет в обезьяну в момент времени T, то есть $x(T) = L$, откуда получаем:

$$L = v_0 \cos\alpha T$$

тогда

$$T = \frac{L}{v_0 \cos\alpha}$$

В момент времени T стрела упадет на Землю, то есть $y(T) = 0$. Получим:

$$0 = v_0 \sin\alpha T - \frac{gT^2}{2}$$

Разделим это уравнение на $T \neq 0$ и разрешим его относительно T:

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Приравняем два полученных выражения для T:

$$\frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{L}{v_0 \cos\alpha}$$

Откуда получим, что

$$v_0 = \sqrt{\frac{Lg}{2\cos\alpha\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{Lg(H^2+L^2)}{2HL}} = \sqrt{\frac{g(H^2+L^2)}{2H}} \approx 11.1 \text{м/с}$$

По правилу об определении значащих цифр при извлечении корня верный ответ 11 м/с
Замечание. Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то допустим и ответ 10 м/с .

10.6. (7 баллов) Саша придумал метод, который позволяет рассчитывать скорости тел. Для этого он взял наклонную плоскость и поставил на ней засечку, на расстоянии L = 10 см от основания. Далее он пустил катиться снизу вверх шарик, замерив времена $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с от начала движения, когда шарик проходил через засечку. Таким образом ему удалось узнать, какую скорость имел шарик в начале движения.

[7] Чему равнялась эта скорость?

[8] При каком минимальном угле (в градусах) Сашин метод не сработает, если оставить засечку на том же расстоянии и не менять начальную скорость?

Замечание. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2. *(А.А. Черенков)*

Ответ: 0,07.

Ответ: 0,14.

Решение. 1) Введем систему координат вдоль наклонной плоскости с осью x, направленной вверх, и точкой начала в нижней точке. Тогда закон движения шарика по плоскости:

$$x(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

Отсюда получаем, что

$$t^2 - \frac{2v_0}{a}t + \frac{2x}{a} = 0$$

Так как t_1 и t_2 - корни этого уравнения при $x = L$, то согласно теореме Виета:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{a} \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{2L}{a} \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим, что

$$v_0 = \frac{L}{t_1} + \frac{L}{t_2} = 7\text{см/с}$$

2) Сашин метод не сработает, если шарик не достигнет засечки на наклонной плоскости. Поэтому минимальный необходимый угол наклонной плоскости определяется из условия, что шарик докатился до засечки и остановился, продолжив затем движение вниз по наклонной плоскости. Запишем закон изменения скорости шарика:

$$v(t) = v_0 - g \sin\alpha t$$

Пусть остановка происходит в момент времени T, тогда:

$$0 = v_0 - g \sin\alpha T$$

то есть

$$T = \frac{v_0}{g \sin\alpha}$$

Заметим, что $x(T) = L$, тогда после подстановки T в закон движения получим:

$$x(T) = L = \frac{v_0^2}{2g \sin\alpha}$$

Откуда окончательно получаем, что

$$\sin\alpha = \frac{v_0^2}{2Lg} = \frac{1}{400},$$

тогда

$$\alpha \approx 0{,}14^o.$$

Так как наименьшее количество значащих цифр в пункте 1 равно единице и ответ необходимо дать в системе СИ, то ответ в пункте 1: 0,07 м/с. В пункте 2 наименьшее количество значащих цифр равно двум.

10.7. (5 баллов) Петю позвали на день рождения в картинг. Машины для картинга развивают максимальную скорость 50 км/ч. Первую часть трассы Петя проехал, разогнавшись до 25 км/ч. Оставшуюся часть трассы Петя проехал, разогнавшись до максимальной скорости.

[9] Во сколько раз работа двигателя при разгоне на втором участке трассы больше, чем на первом участке?

Замечание. Время разгона и силу сопротивления в обоих случаях считать одинаковыми.

(*А.А. Черенков*)

Ответ: 3.

Решение. 1) Запишем второй закон Ньютона:

$$F_{\text{тяги}} - F_{\text{сопр}} = ma$$

откуда

$$F_{\text{тяги}} = F_{\text{сопр}} + ma = const$$

2) Вычислим пройденный путь на первой и второй воловине трассы:

$$s_1 = \frac{v^2}{2a}, s_2 = \frac{(2v)^2 - v^2}{2a} = 3s_1,$$

где $v = 25$км/ч
3) Таким образом, найдем отношение работ, совершенных двигателем:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{F_{\text{тяги}} s_2}{F_{\text{тяги}} s_1} = 3$$

10.8. (6 баллов) На стройке детского сада на штыре висел канат длиной L = 5 м. Один из рабочих, проходя мимо, случайно его задел, и канат пришел в движение.

[10] Какую скорость будет иметь канат, когда целиком соскользнет со штыря, если перед началом движения его концы находились на одном уровне.

Замечание. Ускорение свободного падения принять равным 9,8 м/с^2. *(А.А. Черенков)*

Ответ: 4,9 (допустим ответ 5).

Решение. 1) В начальный момент центр тяжести каната находился на расстоянии $l_1 = \frac{L}{4}$ от штыря, а когда канат покинул штырь – $l_2 = \frac{L}{2}$
2) По закону сохранения энергии:

$$-mgl_1 = \frac{mv^2}{2} - mgl_2$$

Откуда получаем:

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2}} = 4{,}9\text{м/с}$$

По правилу об определении значащих цифр при извлечении корня верный ответ 4,9м/с

10.9. (7 баллов) Санки скатываются с горы, имеющей угол наклона $\beta = 30^o$, и движутся последовательно по горизонтальному участку длиной $s_1 = 7$ м, через горку высотой h = 3 м и углом наклона $\alpha = 60^o$, и снова по горизонтальному участку. Коэффициент трения на горизонтальных участках - $\mu_1 = 0.1$, на наклонных - $\mu_2 = 0.3$.

[11] Определить с какой высоты надо стартовать саням, чтобы они проехали по второму горизонтальному участку не менее $s_2 = 15$ метров.

(А.А. Черенков)

Ответ: 9.

Решение. 1)Вычислим длины наклонных участков, по которым едут санки. При спуске с первой горы:

$$l = \frac{H}{\sin\beta}$$

При движении по второй горке:

$$l_1 = \frac{h}{\sin\alpha}$$

2)Пусть A_1,A_2,A_3,A_4 - модули работ сил трения при движении по первому наклонному, первому горизонтальному, второму наклонному и второму горизонтальному участкам соответсвенно. Ясно, что при движении по второй горке на обоих склонах сила трения совершит одинаковую работу A_3. Найдем эти работы. Рассмотрим горизонтальные участки. По второму закону Ньютона на вертикальную ось:

$$mg = N$$

Тогда:

$$F = \mu_1 N = \mu_1 mg$$

то есть

$$A_2 = \mu_1 mgs_1, A_4 = \mu_1 mgs,$$

где s - путь пройденный санками на втором горизонтальном участке. Рассмторим теперь наклонные участки. При движении санок по первой горе по второму закону ньютона на ось, перпендикулярную поверхности склона:

$$N = mg\cos\beta$$

Тогда:

$$F = \mu_2 N = \mu_2 mg\cos\beta$$

то есть

$$A_1 = \mu_2 mgl\cos\beta$$

Аналогично найдем, что $A_3 = \mu_2 mgl_1\cos\alpha$
3) Для начала проверим, какой путь до полной остановки проедут санки при спуске со второй горки при нулевой начальной скорости. По закону сохранения энергии:

$$mgh = A_3 + A_4$$

$$mgh = \mu_2 mgl_1\cos\alpha + \mu_1 mgs$$

Откуда

$$s = \frac{h - \mu_2 l_1\cos\alpha}{\mu_1} = \frac{1 - \mu_2 \operatorname{ctg}\alpha}{\mu_1} h$$

Таким образом, получаем, что санки проедут заданный путь на втором горизонатльном участке при любой начальной скорости. Поэтому задача сводится к нахождению такой высоты, при спуске с которой санки смогут достичь вершины второй горки.
4) По закону сохранения энергии при спуске с первой горы:

$$mgH = A_1 + A_2 + A_3 + mgh$$

$$mgH = \mu_2 mgl\cos\beta + \mu_1 mgs_1 + \mu_2 mgl_1\cos\alpha + mgh$$

Откуда получаем:

$$H = \mu_2 l\cos\beta + \mu_1 s_1 + \mu_2 l_1\cos\alpha + h = \mu_2 H\operatorname{ctg}\beta + \mu_1 s_1 + \mu_2 h\operatorname{ctg}\alpha + h$$

Окончательное выражение для высоты подъема:

$$H = \frac{\mu_1 s_1 + (\mu_2 \operatorname{ctg}\alpha + 1)h}{1 - \mu_2 \operatorname{ctg}\beta} = 8{,}8\text{м}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то верный ответ 9 м .

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024–2025 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 11 класса

11.1. (6 баллов) В школьном кружке по физике Пете поручили построить температурные зависимости в интервале температур от $T_1 = 20^o$ C до $T_2 = 50^o$ C для системы из угольного стержня длиной $l_1 = 3$ см и радиуса r = 1 мм и металлического стержня того же радиуса и длиной $l_2 = 20$, 60, 80, 90 см. Петя обнаружил, что в одном из этих случаев температурная зависимость отсутствует.

[1] Какова длина металлического стержня в сантиметрах в этом случае?

Замечание. Температурные коэффициенты и удельные сопротивления при 0^o C для угля и металла равны $\alpha_1 = -0{,}8 * 10^{-3}$ $К^{-1}$, $\varrho_1 = 4 * 10^{-5}$ Ом*м, $\alpha_2 = 6 * 10^{-3}$ $К^{-1}$, $\varrho_2 = 2 * 10^{-7}$ Ом*м. *(А.Б.Яковлев)*

Ответ: 80.

Решение. 1) Угольный и металлические стержни соединены последовательно, поэтому их общее сопротивление при температуре T будет равняться:

$$R = R_1(1 + \alpha_1 T) + R_2(1 + \alpha_2 T) = (R_1\alpha_1 + R_2\alpha_2)T + R_1 + R_2$$

где $R_1 = \frac{\rho_1 l_1}{S_1}$ и $R_2 = \frac{\rho_2 l_2}{S_2}$ - сопротивления угольного и металлического стержня при T = 0 соответственно

2) Сопротивление стержней не будет зависеть от температуры, если

$$(R_1\alpha_1 + R_2\alpha_2) = 0$$

Откуда

$$\frac{\rho_1 l_1}{S_1}\alpha_1 = -\frac{\rho_2 l_2}{S_2}\alpha_2$$

И длина металлического стержня:

$$l_2 = -\frac{\rho_1 S_2 \alpha_1}{\rho_2 S_1 \alpha_2} l_1 = -\frac{\rho_1 \alpha_1}{\rho_2 \alpha_2} l_1 = 80\text{см}$$

11.2. (9 баллов) Из пушки производят выстрел ядром под углом $\alpha = 30^o$ к горизонту с начальной скоростью v = 20 м/с, которое взрывается в верхней точке траектории и разлетается во всех направлениях множеством осколков, имеющих одинаковые относительные скорости v_0 = 5 м/с относительно ядра.

[2] Найти объем, ограничиваемый осколками через $t_0 = 1$ с после взрыва.

[3] Какими будут максимальная скорость,

[4] минимальная скорость осколков относительно Земли через t_0?

Замечание. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2. *(А.А.Черенков)*

Ответ: 500.

Ответ: 25.

Ответ: 15.

Решение. 1) Из закона о движении центра масс ясно, что после взрыва вся система осколков продолжит движение таким образом, чтобы ее центр масс двигался по той же траектории, что и ядро, если бы последнее не взорвалось. Таким образом, введем подвижную систему координат оху,жестко связанную с центром масс системы осколков, и рассмотрим в ней движение произвольного осколка, чья начальная относительная скорость была направлена под углом β к горизонту. Тогда уравнения движения этого осколка:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \beta t \\ y(t) = v_0 \sin \beta t \end{cases}$$

откуда получаем, что

$$\begin{cases} \frac{x(t)}{v_0 t} = \cos \beta \\ \frac{y(t)}{v_0 t} = \sin \beta \end{cases}$$

а значит, с учетом основного тригонометрического тождества:

$$\frac{1}{v_0^2 t^2}(x^2 + y^2) = 1$$

Следовательно

$$x^2 + y^2 = v_0^2 t^2$$

то есть все время движения осколки от ядра будут находиться на сфере радиуса $R(t) = v_0 t$, с центром в начале координат подвижной системы координат oxy. Поэтому в момент времени t_0 осколки будут занимать объем, равный объему шара с радиусом $R(t_0) = v_0 t_0$:

$$V = \frac{4}{3}\pi(v_0 t_0)^3 = \frac{4}{3}\pi(v_0 t_0)^3 \approx 523.6\text{м}^3$$

2) по закону сложения скоростей

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e,$$

где v_a,v_r - абсолютная и относительная скорости, v_e - переносная скорость (скорость подвижной системы координат). Таким образом, наибольшую абсолютную скорость будет иметь тот осколок, чья относительная скорость сонаправлена с переносной скоростью, а минимальная скорость будет у того осколка, чья относительная скорость будет противоположно направлена переносной скорости. Таким образом, получаем:

$$v_{max} = v_r + v_e, v_{min} = |v_r - v_e|$$

Заметим, что относительные скорости всех осколков равны v_0 во все моменты времени. Вычислим переносную скорость через $t_0 = 1$с после взрыва. Она будет равняться скорости ядра в этот момент, если бы то не взорвалось. Введем неподвижную систему координат в точке выстрела, тогда уравнения проекций скоростей ядра имеют следующий вид:

$$\begin{cases} v_x(t) = v \cos \alpha \\ v_y(t) = v \sin \alpha - gt \end{cases}$$

Когда ядро достигнет высшей точки траектории, вертикальная проекция скорости будет равняться нулю:

$$0 = v_y(T) = v \sin \alpha - gT,$$

откуда

$$T = \frac{v \sin \alpha}{g}$$

тогда

$$v_e(t_0+T) = \sqrt{v_x^2(t_0+T) + v_y^2(t_0+T)} = \sqrt{(v\cos\alpha)^2 + (v\sin\alpha - g(t_0 + \frac{v\sin\alpha}{g}))^2} = \sqrt{(v\cos\alpha)^2 + (gt_0)^2}$$

Окончательные выражения для максимальной и минимальной скоростей осколков:

$$v_{max} = v_r + v_e = v_0 + \sqrt{(v\cos\alpha)^2 + (gt_0)^2} \approx 24.9\text{м/с}$$
$$v_{min} = |v_0 - \sqrt{(vcos\alpha)^2 + (gt_0)^2}| = 14.9\text{м/с}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то верный ответ в пункте 1: 500 м^3 .
По правилу об определении значащих цифр при извлечении корня верные ответы в пункте 2: 25м/с; 15 м/с.

11.3. (5 баллов) У Дани есть игрушечная железная дорога, по которой может ехать поезд со скоростью 25 км/ч. К рельсам он присоединил вольтметр.

[5] Какие будут показания вольтметра при приближении к нему поезда, если расстояние между рельсами d = 10 см?

Замечание. Считать, что нормальная составляющая магнитной индукции Земли Вн = $4*10^{-5}$ Тл. (*А.А. Черенков*)

Ответ: 0,00003.

Решение. 1) По закону электромагнитной индукции Фарадея ЭДС возникающее в цепи связано с изменением потока магнитной индукции:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B_n \Delta S}{\Delta t}$$

2) Изменение площади контура в единицу времени выразим через скорость поезда:

$$\Delta S = v\Delta t d$$

3) Окончательно получаем:

$$\varepsilon = \frac{B_n v \Delta t d}{\Delta t} = B_n v d = 27.8\text{мкВ}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице и ответ необходимо дать в системе СИ, то ответ: 0,00003 В.

11.4. (9 баллов) Петя собирается участвовать в ракетостроительном чемпионате. Мальчик собрал тестовую модель ракеты массой M = 2 кг и решил ее проверить. Ракета стартует с поверхности земли с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с под углом $\alpha = 30^o$ к горизонту. Три раза через равные промежутки времени $\Delta t = 0.3$ с из ракеты выбрасывается масса $\Delta m = 0.5$ кг со скоростью u = 5 м/с относительно ракеты.

[6] Какую скорость будет иметь ракета при подлете к Земле?

Замечание. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2. (*А.А. Черенков*)

Ответ: 33 (допустим ответ 30).

Решение. 1) Введем неподвижную прямоугольную систему координат оху в месте взлета ракеты. Тогда законы изменения координат и скоростей имеют следующий вид:

$$\begin{cases} y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \\ v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

К моменту времени Δt будем иметь:

$$\begin{cases} y(\Delta t) = v_0 \sin\alpha \Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2} = y_1 \approx 3.31\text{м} \\ v_x(\Delta t) = v_0 \cos\alpha = v_{1x} \approx 21.65\text{м/с} \\ v_y(\Delta t) = v_0 \sin\alpha - g\Delta t = v_{1y} \approx 9.56\text{м/с} \end{cases}$$

В это время из ракеты выбросится масса Δm. Вычислим новые проекции скоростей ракеты v_{01x},v_{01y} после выброса массы. Запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси:

$$\begin{cases} Mv_{1x} = (M - \Delta m)v_{01x} + \Delta m(v_{1x} - u_x) \\ Mv_{1y} = (M - \Delta m)v_{01y} + \Delta m(v_{1y} - u_y) \end{cases}$$

Где $u_x = u\frac{v_{1x}}{\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2}}$,$u_y = u\frac{v_{1y}}{\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2}}$ - проекции скорости выброшенной массы
Тогда решая систему, получим:

$$\begin{cases} v_{01x} = v_{1x} + \frac{\Delta m}{M-\Delta m}u\frac{v_{1x}}{\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2}} \approx 23.17\text{м/с} \\ v_{01y} = v_{1y} + \frac{\Delta m}{M-\Delta m}u\frac{v_{1y}}{\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2}} \approx 10.23\text{м/с} \end{cases}$$

2) Запишем теперь новые уравнения движения ракеты, отсчет времени снова начнем с нуля. Получим:

$$\begin{cases} y(t) = y_1 + v_{01y}t - \frac{gt^2}{2} \\ v_x(t) = v_{01x} \\ v_y(t) = v_{01y} - gt \end{cases}$$

К моменту времени Δt будем иметь:

$$\begin{cases} y(\Delta t) = y_1 + v_{01y}\Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2} = y_2 \approx 5.94\text{м} \\ v_x(\Delta t) = v_{01x} = v_{2x} \approx 23.17\text{м/с} \\ v_y(\Delta t) = v_{01y} - g\Delta t = v_{2y} \approx 7.29\text{м/с} \end{cases}$$

Рассуждая аналогично пункту 1, из закона сохранения импульса найдем новые проекции скоростей ракеты v_{02x},v_{02y} после выброса массы:

$$\begin{cases} (M - \Delta m)v_{2x} = (M - 2\Delta m)v_{02x} + \Delta m(v_{2x} - u_x) \\ (M - \Delta m)v_{2y} = (M - 2\Delta m)v_{02y} + \Delta m(v_{2y} - u_y) \end{cases}$$

Где $u_x = u\frac{v_{2x}}{\sqrt{v_2x^2+v_2y^2}}$,$u_y = u\frac{v_{2y}}{\sqrt{v_{2x}^2+v_{2y}^2}}$ - проекции скорости выброшенной массы
Тогда решая систему, получим:

$$\begin{cases} v_{02x} = v_{2x} + \frac{\Delta m}{M-2\Delta m}u\frac{v_{2x}}{\sqrt{v_{2x}^2+v_{2y}^2}} \approx 25.56\text{м/с} \\ v_{02y} = v_{2y} + \frac{\Delta m}{M-2\Delta m}u\frac{v_{2y}}{\sqrt{v_{2x}^2+v_{2y}^2}} \approx 8.04\text{м/с} \end{cases}$$

3) Снова запишем новые уравнения движения ракеты, отсчет времени снова начнем с нуля. Получим:

$$\begin{cases} y(t) = y_2 + v_{02y}t - \frac{gt^2}{2} \\ v_x(t) = v_{02x} \\ v_y(t) = v_{02y} - gt \end{cases}$$

К моменту времени Δt будем иметь:

$$\begin{cases} y(\Delta t) = y_2 + v_{02y}\Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2} = y_3 \approx 7.91\text{м} \\ v_x(\Delta t) = v_{02x} = v_{3x} \approx 25.56\text{м/с} \\ v_y(\Delta t) = v_{02y} - g\Delta t = v_{3y} \approx 5.10\text{м/с} \end{cases}$$

Рассуждая аналогично пункту 1-2,из закона сохранения импульса найдем новые проекции скоростей ракеты v_{03x},v_{03y} после выброса массы:

$$\begin{cases} (M - 2\Delta m)v_{1x} = (M - 3\Delta m)v_{01x} + \Delta m(v_{1x} - u_x) \\ (M - 2\Delta m)v_{1y} = (M - 3\Delta m)v_{01y} + \Delta m(v_{1y} - u_y) \end{cases}$$

Где $u_x = u\frac{v_{3x}}{\sqrt{v_{3x}^2+v_{3y}^2}}$,$u_y = u\frac{v_{3y}}{\sqrt{v_{3x}^2+v_{3y}^2}}$ - проекции скорости выброшенной массы
Тогда решая систему, получим:

$$\begin{cases} v_{03x} = v_{3x} + \frac{\Delta m}{M-3\Delta m}u\frac{v_{3x}}{\sqrt{v_{3x}^2+v_{3y}^2}} \approx 30.46\text{м/с} \\ v_{03y} = v_{3y} + \frac{\Delta m}{M-3\Delta m}u\frac{v_{3y}}{\sqrt{v_{3x}^2+v_{3y}^2}} \approx 6.09\text{м/с} \end{cases}$$

При этом полная скорость вычисляется как:

$$v_3 = \sqrt{v_{03x}^2 + v_{03y}^2}$$

4) Наконец, чтобы вычислить скорость ракеты при подлете к Земле запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{\tilde{M}v^2}{2} = \frac{\tilde{M}v_3^2}{2} + \tilde{M}gy_3,$$

где $\tilde{M}$ - текущая масса ракеты
Откуда получаем:

$$v = \sqrt{v_3^2 + 2gy_3} = \sqrt{v_{03x}^2 + v_{03y}^2 + 2gy_3} \approx 33.46\text{м/с}$$

По правилу об определении значащих цифр при извлечении корня верныq ответ: 33 м/с . Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то допустимый ответ: 30 м/с

11.5. (8 баллов) В скейтпарке есть две рампы – одна прикреплена к земле и неподвижна, а вторая на подвижной опоре. Обе рампы одинаковой высоты h = 2 м. Местный скейтбордист сначала скатился с первой рампы, а затем со второй.

[7] Во сколько раз изменится скорость скейтбордиста во втором случае по сравнению с первым, если масса скейтбордиста в два раза меньше массы рамп?

Замечание. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2.

(*А.А. Черенков*)

Ответ: 1,2.

Решение. 1) В первом случае рампа остается неподвижной, тогда запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh$$

Откуда находим скорость скейтбордиста в конце спуска:

$$v = \sqrt{2gh}$$

2) Во втором случае при спуске скейтбордиста рампа приходит в движение. Запишем закон сохранения импульса на ось икс:

$$mv_1 = MV$$

Откуда скорость, которую приобретает рампа:

$$V = \frac{mv_1}{M}$$

По закону сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV^2}{2}$$

$$2gh = v_1^2 + \frac{m}{M}v_1^2$$

Откуда скорость скейтбордиста в конце спуска:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{m}{M}}}$$

3) Таким образом, найдем отношение скоростей:
$\frac{v_1}{v} = \sqrt{1+\frac{m}{M}} = 1{,}22$
По правилу об определении значащих цифр при извлечении корня верный ответ: 1,2.

11.6. (7 баллов) В школьной лаборатории изучают равновесие твердых тел в жидкостях. Для этого учитель взял пустой стакан цилиндрической формы и аккуратно погрузил его дном кверху и отпустил. При этом стакан оказался в положении равновесия.

[8] На какую глубину погружен стакан?

Замечание. Стакан имеет высоту H = 15 см, диаметр D = 3 см и массу m = 0,1 кг. Атмосферное давление принять равным $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падаения g = 9,8 м/с^2. Плотность воды - $\rho = 1000$ кг/м^3. *(А.А. Черенков)*

Ответ: 0,6.

Решение. 1) Давление воды на искомой глубине h:

$$p_1 = p_0 + \rho gh,$$

где ρ - плотность воды, p_0 - атмосферное давление
2) Для воздуха в стакане справедлив закон Бойля-Мариотта:

$$p_0V_0 = p_1V_1$$

где V_0,V_1- объемы воздуха в стакане до и после погружения соотвественно
3) Учтем, что стакан находится в равновесии, поддерживаемый архимедовой силой воздуха в нем:

$$\rho gV_1 = mg$$

4) Решая систему уравнений 1-3, получаем искомую глубину:

$$h = \frac{p_0}{mg}\left(V_0 - \frac{m}{\rho}\right) = \frac{p_0}{mg}\left(\frac{\pi D^2}{4}H - \frac{m}{\rho}\right) = 0{,}6\text{м}$$

11.7. (7 баллов) Петя прочитал в учебнике метод, по которому можно определить заряд капли. Для этого необходимо взять плоский конденсатор и измерить времена падения капли с одной обкладки на другую при различной разности потенциалов. В первый раз Петя приложил разность потенциалов 100 В, а во второй 200 В. Измеренные времена при этом получились t_1 = 2 с, t_2 = 3 с.

[9] Чему равен модуль заряда капли, если ее масса m = 50 мг?

Замечание. Ускорение свободного падения принять равным 9,8 м/с^2. *(А.А. Черенков)*
Ответ: 0,00002.
Решение. 0) Заметим, что при увелечении разности потенциалов между обкладками конденсатора время падения капли увеличивается. Это значит, что сила Кулона, действующая на каплю, направлена вертикально вверх.
1) На каплю действует сила тяжести и сила Кулона. Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$mg - F_k = ma$$

Откуда:

$$a = g - \frac{F_k}{m} = g - \frac{Eq}{m} = g - \frac{Uq}{dm},$$

где E,U,d - напряженность,напряжение и расстояние между обкладкакми конденсатора соответвенно, q - заряд капли.
2) Тогда уравнение движения капли в проекции на вертикальную ось имеет вид:

$$y(t) = \frac{at^2}{2}$$

В момент T, когда капля закончила падение:

$$y(T) = d = \frac{aT^2}{2} = \frac{T^2}{2}(g - \frac{Uq}{dm})$$

3) Записывая последнее уравнение для первого и второго случая падения капли, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} d = \frac{t_1^2}{2}(g - \frac{U_1 q}{dm}) \\ d = \frac{t_2^2}{2}(g - \frac{U_2 q}{dm}) \end{cases}$$

Для решения системы сначала домножим каждое уравнения на $2dm$ и приравняем правые части:

$$t_1^2(gdm - U_1 q) = t_2^2(gdm - U_2 q)$$

После приведения подобных членов, можно выразить d:

$$d = \frac{q(U_2 t_2^2 - U_1 t_1^2)}{gm(t_2^2 - t_1^2)}$$

Подставим теперь это выражение в первое уравнение:

$$\frac{q(U_2 t_2^2 - U_1 t_1^2)}{gm(t_2^2 - t_1^2)} = \frac{t_1^2 g}{2}\left(1 - \frac{U_1(t_2^2 - t_1^2)}{U_2 t_2^2 - U_1 t_1^2}\right)$$

Разделим на коэффициент при q, окончательно получим:

$$q = g^2 t_1^2 t_2^2 m \frac{(U_2 - U_1)(t_2^2 - t_1^2)}{(2 * (U_2 t_2^2 - U_1 t_1^2)^2} \approx 0{,}000022\text{Кл}$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице и ответ необходимо дать в системе СИ, то ответ: 0,00002 Кл.

11.8. (5 баллов) Медный шарик радиусом 1 мм подвешен на ниточке над заземленной неограниченной плоской металлической поверхностью. Расстояние между шариком и поверхностью l = 5 см. Шарику сообщают некоторый заряд.

[10] Во сколько раз изменится сила взаимодействия между пластиной и шариком, если расстояние между ними увеличить на $l_0 = 2$ см.

(*А.А. Черенков*)

Ответ: 0,5.

Решение. 1) Действие проводящей плоскости с ее индуцированными зарядами можно заменить действием точечного заряда, являющегося зеркальным отображением данного заряда в проводящей плоскости. Тогда сила действующая на заряд, находяшийся на расстоянии l от плоскости:

$$F = k\frac{q^2}{(2l)^2}$$

2) Таким образом, отношение сил, действующих на заряд:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{l^2}{(l+l_0)^2} = 0{,}5$$

11.9. (7 баллов) Учеников одной школы пригласили на экскурсию в физическую лабораторию. На одной из установок детям показали эксперимент, демонстрирующий влияние электрического поля на движущийся в нем электрон. В плоский конденсатор влетает электрон с энергией 1000 эВ под углом $\alpha_1 = 30^o$ к обкладкам, а вылетает под углом $\alpha_2 = 60^o$.

[11] Какое было напряжение на конденсаторе, если его длина l = 10 см и расстояние между обкладками d = 1см?

Замечание. Действием силы тяжести пренебречь. (*А.А. Черенков*)

Ответ: 200.

Решение. 1) Вычислими начальную скорость электрона:

$$W = \frac{mv_0^2}{2}$$

тогда

$$v_0^2 = \frac{2W}{m}$$

2) Введем прямоугольную систему координат. ось x направим вдоль пластин конденсатора, а ось y - перпендикулярно поверхности пластин конденсатора. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$$F = ma$$

тогда

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m} = \frac{Uq}{dm}$$

3) Уравнение движения электрона вдоль конденсатора:

$$x(t) = v_x t$$

Проекции скоростей электрона меняются по законам:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha_1 \\ v_y(t) = v_0\sin\alpha_1 + at \end{cases}$$

Тогда время, за которое электрон пролетает конденсатор:

$$T = \frac{x(T)}{v_x(T)} = \frac{l}{v_0\cos\alpha_1}$$

4) По условию, электрон вылетает под углом α_2, тогда:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{v_y(T)}{v_x(T)} = \frac{v_0 \sin\alpha_1 + aT}{v_0 \cos\alpha_1}$$

Откуда окончательно находим, подставив выражения для времени T и ускорения a:

$$U = (\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1)\frac{2W \cos\alpha_1^2 d}{ql}$$

Расчет ведем, взяв за единицу энергии 1эВ, тогда заряд электрона равен единице. Получаем:

$$U = 173B$$

Так как наименьшее количество значащих цифр равно единице, то ответ: 200 В.