Правила приближенных вычислений.

Числа, с которыми мы имеем дело в жизни , бывают двух типов. Одни в точности дают истинную величину, другие - только приблизительно. Первые называют точным и , вторые - приближенными .

Теория приближенных вычислений позволяет:
1) зная степень точности данных , оценить степень точности результатов еще до выполнения действий ;
2) брать данные с надлежащей степенью точности , достаточной , чтобы обеспечить требуемую точность результата , но не слишком большой , чтобы избавить вычислителя от бесполезных расчетов ;
3) рационализировать сам процесс вычисления , освободив его о т тех выкладок , которые нс окажут влияния на точные цифры результата .

Пример 1. Запись 2,40 означает , что верны и сотые доли ; истинное число может быть 2,403 или 2,398 , но не 2,421 и не 2,382 .

Т о же отличие проводится и для целых чисел . Запись 382 означает, что все цифры верны ; если же за последнюю цифру ручаться нельзя , то число округляется, но записывается не в виде 380 , а в виде $38 \cdot 10$. Запись же 380 означает , что последняя цифра (0) верна. Если в числе 4720 верны лишь первые две цифры , его нужно записать в виде $47 \cdot 10^2$; это число можно также записать в виде $4,7 \cdot 10^3$ и. т. д .
Значащими цифрам и называются все верные цифры числа кроме нулей , стоящих впереди числа. Например, в числе 0,00385 три значащие цифры; в числе 0,03085 четыре значащие цифры ; в числе 2500 - четыре; в числе $2,5 \cdot 10^3$ - две. Число значащих цифр некоторого числа называется его *значностью*.

Правила округления

Правило 1 . Если первая из отбрасываемых цифр больше чем 5, то последняя из сохраняемых цифр усиливается, т. е . увеличивается на единицу.
Усиление совершается и тогда, когда первая из отбрасываемых цифр равна 5, а за ней есть одна или несколько значащих цифр .

Правило 2 . Если первая из отбрасываемых цифр меньше чем 5, то усиления не делается .

Правило 3 . Если отбрасывается цифра 5 , а за ней нет значащих цифр , то округление производится на ближайшее четное число, т. е. последняя сохраняемая цифра оставляется неизменной , если она четная, и усиливается , если она нечетная .

Пример 2. Округляя числа
6,527 ; 0,456 ; 2,195 ; 1,450; 0,950; 4,851 ; 0,850; 0,05
до первого десятичного знака, получаем :
6,5 ; 0,5 ; 2,2 ; 1,4 ; 1,0 ; 4,9 ; 0,8 ; 0,0 .

Абсолютная и относительная погрешность

Абсолютной погрешностью или , короче , погрешностью приближенного числа называется разность между этим числом и его точным значением (из большего числа вычитается меньшее).

Относительной погрешностью приближенного числа называется отношение абсолютной погрешности приближенного числа к самому этому числу.

Пример 3. В школе 197 учащихся. Округляем это число до 200. Абсолютная погрешность составляет 200 - 197 = 3. Относительная погрешность равна 3/197 или , округленно , 3/200 = 1,5 % .

Пример 4 . Продавец взвешивает арбуз на чашечных весах. В наборе гирь наименьшая - 50 г. Взвешивание дало 3600 г. Это число - приближенное . Точная масса арбуза неизвестна. Но абсолютная погрешность не превышает 50 г. Относительная погрешность не превосходит $50/3600 \approx 1{,}4\ \%$.

Число, заведомо превышающее абсолютную погрешность (или в худшем случае равное ей), называется предельной абсолютной погрешностью. Число, заведомо превышающее относительную погрешность (или в худшем случае равное ей), называется предельной относительной погрешностью.

В примере 4 за предельную абсолютную погрешность можно взять 50 г, а за предельную относительную погрешность - 1,4 % .

Для каждого приближенного числа должна быть известна его предельная погрешность (абсолютная или относительная). Когда она прямо не указана , подразумевается, что предельная абсолютная погрешность составляет половину единицы последнего выписанного разряда . Так , если приведено приближенное число 4,78 без указания предельной погрешности, то подразумевается , что предельная абсолютная погрешность составляет 0,005 . Вследствие этого соглашения всегда можно обойтись без указания предельной погрешности числа.

$$\delta = \frac{\Delta}{a}$$

Пример 5. Цилиндрический поршень имеет около 35 мм в диаметре. С какой точностью нужно его измерить микрометром, чтобы предельная относительная погрешность составляла 0,05 % ?

Решение. По условию , предельная относительная погрешность должна составлять 0,05 % от 35 мм. Следовательно, предельная абсолютная погрешность равна $35 \cdot 0{,}05/100 = 0{,}0175$ (мм) или , усиливая, 0,02 (мм).

Пример 6. Найти сумму 25,3 + 0 ,442 + 2,741 .
Не округляя слагаемых, получим 28,483 . Последние две цифры бесполезны , так как в первом слагаемом возможна неточность в несколько сотых . Округляя сумму до точных цифр (т. е. до десятых долей), получаем 28,5 . Если предварительно произведем округление до точных цифр , то найдем без лишнего труда 25,3 + 0,4 + 2,7 = 28,4 . Цифра десятых получилась на 1 меньше . Если же учесть и цифры сотых , получим
25,3 + 0,44 + 2,74 = 28,48, т . е. округленно 28,5 . **Цифра 5 надежнее** , чем 4 , хотя не исключена возможность, что верная цифра - именно 4.

Погрешность суммы и разности

Предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей отдельных слагаемых.

Пример 7. Найти сумму приближенных чисел
0,0909 + 0,0833 + 0,076 9 + 0,0714 +
+ 0,0667 + 0,0625 + 0,0588 + 0,0556 + 0,0526 .

Сложение дает 0,6187 . Предельная погрешность каждого слагаемого 0,00005; предельная погрешность суммы 0,00005 · 9 = 0,00045 . Значит , в последнем (четвертом) знаке суммы возможна ошибка до 5 единиц.
Поэтому округляем сумму до третьего знака, т . е. до тысячных. Получаем 0,619; здесь все знаки верные .

Предельная абсолютная погрешность разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.

Пример 8. Пусть предельная погрешность приближенного уменьшаемого 85 равна 2, а предельная погрешность вычитаемого 32 равна 3. Предельная погрешность разности 85 - 32 = 53 есть 2 + 3 = 5. В самом деле, истинные значения уменьшаемого и вычитаемого могут равняться 85 + 2 = 87 и 32 - 3 = 29. Тогда истинная разность есть 87 - 29 = 58 . Она на 5 отличается от приближенной разности 53.

Предельная относительная погрешность суммы (но не разности!) лежит между наименьшей и наибольшей из относительных погрешностей слагаемых.

Если все слагаемые имеют одну и ту же (или примерно одну и ту же) предельную относительную погрешность, то и сумма имеет ту же (или примерно ту же) предельную относительную погрешность.

Пример 9. В каждом слагаемом суммы 24,4 + 25,2 + 24,7 = 74,3 предельная относительная погрешность примерно одна и та же, именно 0,0 5 : 25 = = 0,2 % . Такова же она и для суммы. Здесь предельная абсолютная погрешность равна 0,15 , а относительная 0,15 : 74,3 ≈ 0,15 : 75 = 0,2 % .

В противоположность сумме разность приближенных чисел может быть менее точной, чем уменьшаемое и вычитаемое .

Потеря точности особенно велика в том случае, когда уменьшаемое и вычитаемое мало отличаются друг от друга.

Пример 10. Измерение внешнего и внутреннего диаметра тонкостенной трубки дало для первого 28,7 мм , а для второго 28,3 мм. Вычислив по этим данным толщину стенки, найдем 0,5 · (28, 7 - 2 8 , 3) = 0,2 (мм). Предельная относительная погрешность уменьшаемого (28,7) и вычитаемого (28,3) одна и та же: δ = 0,2 % . Предельная относительная погрешность разности 0,4 (а также ее половины 0,2) составляет 25 % . Ввиду указанного факта следует всегда , когда это возможно , избегать вычисления искомой величины с помощью вычитания близких чисел .

Погрешность произведения

Предельная относительная погрешность произведения приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей .

Точное же выражение δ будет:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2$$

Пример 11. Пусть перемножаются приближенные числа 53,2 и 25,0 .

Предельная абсолютная погрешность каждого есть 0,05. Поэтому δ_1= 0,05 : 53,2 = 0,0009 ; δ_2= 0,05 : 25,0 = 0,002 . Предельная относительная погрешность произведения 53,2 · 25,0 = 1330 приближенно равна 0,0009 + 0,0020 = 0,0029 . Величина $\delta_1\delta_2$= 0,0009 · 0,002 = 0,0000018 столь мала , что учитывать ее нет смысла. Предельная абсолютная погрешность произведения 1330 равна 1330 · 0,0029 ≈ 4 , так что последняя цифра произведения (нуль) может быть неверной .

$$1330 \pm 4$$

Пример 12. Найти объем комнаты по данным измерения : длина 4,57 м , ширина 3,37 м, высота 3,18 м (предельные абсолютные погрешности 0,005 м) .

Перемножая данные числа , находим , что объем составляет 48,974862 $м^2$. Но здесь лишь две цифры безусловно верны , уже в третьей цифре может быть небольшая погрешность . Действительно , предельные относительные погрешности сомножителей а вны : δ_1= 0,005 : 4,57 ≈ 0,0011 ; δ_2= 0,005 : 3,37 ≈ 0,0015 ; δ_3 = 0,005 : 3,18 ≈ 0,0016. Предельная относительная погрешность произведения есть δ = 0,0011 + 0,0015 + 0,0016 = 0,0042. Предельная абсолютная погрешность произведения Δ = 49,0 · 0,0042 ≈ 0,21. Поэтому уже третья значащая цифра произведения ненадежна. Значит, нужно считать , что объем комнаты составляет 49,0 $м^3$.

Практические выводы.
1 . Если перемножаются приближенные числа с одним и тем же количеством значащих цифр, то в произведении следует удержать столько же значащих цифр. Последняя из удержанных цифр будет не вполне надежна.
2 . Если некоторые сомножители имеют больше значащих цифр , чем другие, то еще до умножения следует первые округлить, сохранив в них столько цифр , сколько имеет наименее точный сомножитель, или еще одну (в качестве запасной). Дальнейшие цифры удерживать бесполезно.
3 . Если требуется, чтобы произведение двух чисел имело заранее данное число вполне надежных цифр, то в каждом из сомножителей число точных цифр (найденных измерением или вычислением) должно быть на единицу больше. Если количество сомножителей больше двух и меньше десяти , то в каждом из сомножителей число точных цифр для полной гарантии должно быть на две единицы больше , чем требуемое число точных цифр. Практически же вполне достаточно взять лишь одну лишнюю цифру.

Деление приближенных чисел

Правило 1 . ***Предельная относительная погрешность частного приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.***

Пример 13. Приближенное число 50,0 делится на приближенное число 20,0.

Предельная погрешность делимого и делителя 0,05 . Тогда предельная относительная погрешность делим ого есть 0,05/50,0 = 0,1 % , а предельная относительная погрешность делителя 0,05/20,0 = 0,25 %. Предельная относительная погрешность частного 50,0 : 20,0 = 2,50 должна составлять приблизительно 0,1 % + 0,25 % = 0,35 % . Действительно , истинная величина частного не больше, чем (50,0 + 0,05) : (20,0 - 0,05) = 2,50877 , и нс меньше , чем (50,0 - 0,05) : (20,0 + 0,05) = 2,49127 . Если истинное значение частного есть 2,50877 , то абсолютная погрешность составляет 2,50877 - 2,50 =0,00877. Если же истинное значение есть 2,49127, то абсолютная погрешность составит 2,50 - 2,49127 =0,0 0873 . Рассмотренные случаи - самые неблагоприятные .

Значит, предельная относительная погрешность составляет 0,00877 : 2,50 = 0,00351 , т . е . приближенно 0,35 % .

Пример 14. Найти предельную абсолютную погрешность частного 2,81 : 0,571 .

Решение . Предельная относительная погрешность делимого есть 0,005 : 2,81 = 0,2 % ; делителя 0,0005 : 0,571 = 0,1 % ; частного 0,2 % + 0,1% = 0,3 % . Предельная абсолютная погрешность частного приближенно равна (2,81/0,587)· 0,003 = 0,015. Значит , в частном 2,81 : 0,571 = 4,92 уже третья значащая цифра не надежна.

$$4{,}92 \pm 0{,}2$$

Правило 2. ***Пусть делимое и делитель имеют каждое по k значащих цифр . Тогда абсолютная погрешность частного в худшем случае близка к 1,05 единицы (k - 1)-го знака (этого значения она никогда не достигает).***

Поэтому в частном следует брать столько же значащих цифр , сколько их имеют делимое и делитель . Если же одно из данных чисел (делимое или делитель) имеет больше значащих цифр , чем другое , то следует отбросить все лишние цифры или сохранить только первую из них (в качестве запасной). Если требуется , чтобы частное имело заранее данное число верных цифр, то в делимом и делителе нужно иметь на одну значащую цифру больше .

Возведение в степень и извлечение квадратного корня из приближенных чисел

Возведение в (целую) степень есть повторное умножение , и поэтому к нему относится все сказанное об умножении. При возведении в небольшую степень результат имеет столько же верных цифр , сколько взятое число , или содержит небольшую ошибку в последнем знаке . Если же степень велика, то накопление небольших ошибок может отразиться и на цифрах высшего разряда .
При извлечении корня любой степени результат имеет по меньшей мере столько же верных цифр, сколько их было в подкоренном числе. Так , извлекая квадратный корень из приближенного числа 40,00 , можно получить четыре верные цифры ($\sqrt{40{,}00} = 6{,}324$) .

Средние величины

Средняя арифметическая величина (или среднее арифметическое) получается сложением данных величин и делением суммы на число этих величин:

$$m_{\text{а}} = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Точность среднего арифметического

Если среднее арифметическое получено из сравнительно небольшого ряда данных измерения, то не исключена возможность, что истинная величина несколько отклоняется от вычисленной средней . Тогда важно знать , как велико может быть это отклонение; речь идет не о теоретически мыслимом отклонении (оно может быть как угодно велико) , а о практически возможном . Величина последнего зависит от величины среднего квадратичного отклонения.

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из средних арифметических всех квадратов разностей между данными числами и их средним арифметическим . Среднее квадратичное отклонение принято обозначать греческой буквой σ (сигма):

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - m_{\text{а}})^2 / n}$$

Если число измерений примерно равно 10, то истинное значение величины может отличаться от среднего арифметического не более чем на величину среднего арифметического отклонения σ. Точнее говоря, отклонения, большие чем σ, возможны лишь в исключительных случаях, число которых составляет около полупроцента всех возможных случаев.

Если число измерений значительно больше десяти, то максимальное практически возможное отклонение истинной величины от среднего арифметического будет меньше чем σ . Именно отклонение не превысит величины $3\sigma/\sqrt{n}$ (n - число измерений) . Так, когда число измерений примерно равно 1000, практически возможны лишь отклонения , не превышающие 0,1 σ .