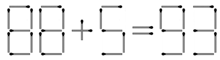
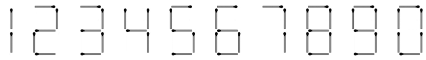
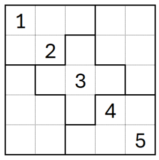
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 5 класса

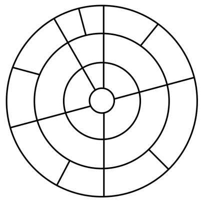
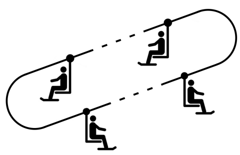
Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2024-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2024 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Можно ли в прямоугольнике 2×4 разместить однозначные числа без повторов так, чтобы сумма любых двух чисел, соседних по стороне, являлась простым числом?
   Примечание. Напомним, что простое число — это целое число, большее 1, которое делится только на единицу и само на себя. (*М. В. Карлукова*)
2. Первоклассник Паша выложил из спичек пример $88 + 5 = 93$ (см. справа). Учитель поставил ему пятёрку.
   (a) Помогите первокласснику Андрею тоже получить пятёрку, переложив в Пашином примере ровно одну спичку так, чтобы равенство осталось верным.
   
   (b) Придумайте свой верный пример из 5 различных цифр, выложенных спичками, так что в нём можно переложить одну спичку от одной цифры к другой, чтобы снова получилось верное равенство (иными словами, знаки арифметических операций изменять нельзя, а знак «=» нельзя перечёркивать). Образцы всех цифр представлены справа. (*П. Д. Муленко*)
   
3. Сколько решений имеет фигурное судоку, изображённое справа? Не забудьте доказать, что никаких других решений нет.
   Примечание. По правилам фигурных судоку 5×5 во всех строках, столбцах и выделенных блоках должны встречаться все цифры от 1 до 5. (*М. В. Карлукова*)
   

4. Маша и Костя по очереди ставят в клетки шахматной доски знаки $+$ и $-$ (начинает Костя) по следующим правилам:
   - каждым ходом игрок выбирает произвольную свободную клетку, и ставит в неё один знак по своему выбору;
   - если после хода игрока в клетку некоторого цвета оказалось, что в клетках этого цвета стало поровну плюсов и минусов, то игрок автоматически считается проигравшим;
   - после заполнения доски отдельно для чёрных и белых клеток вычисляется, каких знаков оказалось больше: если в одном цвете больше плюсов, а в другом больше минусов, то побеждает Маша, иначе побеждает Костя.

   Кто может обеспечить себе победу, и как для этого необходимо действовать? (*П. Д. Муленко*)
5. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.
   - Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
   - Среди них есть пять девочек, каждая из которых знакома ровно с двумя мальчиками.
   - Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с тремя мальчиками каждая.
   - Каждый мальчик знаком с четырьмя девочками.

   Какое наименьшее количество девочек могли прийти на олимпиаду? Не забудьте доказать, что это действительно минимальное количество. (*Л. С. Корешкова*)
6. Офис компании расположен на отдельном этаже бизнес-центра (см. рис.). В каждой комнате находится отдел, которым руководит менеджер. Директор компании решил повысить некоторых руководителей отделов до главных менеджеров. Однако нельзя допустить, чтобы двумя соседними отделами руководили главные менеджеры (иначе они будут спорить через стенку, кто из них главнее). Какое максимальное количество менеджеров можно повысить в должности? Не забудьте объяснить, почему оно действительно максимальное. (*И. М. Туманова*)
   
7. Кресла на кресельном подъёмнике Розы Хутор пронумерованы последовательно: 1, 2, 3 и т. д. Расстояния между каждыми двумя соседними сиденьями одинаковы. Во время грозы кресельный подъёмник остановился, и в этот момент кресло 22 находилось на одной высоте с креслом 59, а кресло 93 — на той же высоте, что и кресло 142. Определите количество кресел на кресельном подъёмнике. (*Л. С. Корешкова*)
   

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 6 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2024-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2024 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

1. Можно ли в прямоугольнике 2×4 разместить все числа от 1 до 8 так, чтобы сумма любых двух чисел, соседних по стороне, являлась простым числом?

   Примечание. Напомним, что простое число — это целое число, большее 1, которое делится только на единицу и само на себя. (*М. В. Карлукова*)

2. На самостоятельной работе учитель выдал каждому из 10 учеников клетчатый листок с нарисованным на нм многоугольником, составленным из 10 клеток (разным детям могли достаться разные многоугольники), и попросил вычислить периметр этого многоугольника. Оказалось, что у всех учеников разные ответы от 13 до 22. Какое наименьшее количество неправильных ответов среди них? (*С. П. Павлов*)

3. Костя и Маша по очереди ставят в клетки доски 8×8 знаки $+$ и $-$ (начинает Костя) по следующим правилам:

   - перед каждым ходом игрок выбирает знак и цвет (красный, зелёный или синий), которым напишет выбранный знак в произвольной свободной клетке доски;
   - если после очередного хода игрока плюсов и минусов выбранного им цвета стало поровну, то игрок автоматически считается проигравшим;
   - после заполнения доски для каждого цвета вычисляется, каких знаков оказалось больше: если минусов больше в одном или трёх цветах, то побеждает Маша, иначе побеждает Костя.

   Кто может обеспечить себе победу, и как для этого необходимо действовать? (*П. Д. Муленко*)

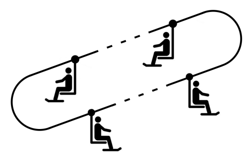
4. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.

   - Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
   - Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.
   - Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
   - Ни один мальчик не знаком более чем с четырьмя девочками.

   Какое наибольшее количество девочек могли прийти на олимпиаду, если всего пришло 15 детей? Не забудьте доказать, что это действительно максимальное количество. (*Л. С. Корешкова*)

5. Обозначим произвольное трёхзначное число как $\overline{fdi}$, где каждая буква обозначает отдельную цифру. Сколько существует таких чисел $\overline{fdi}$, что $\overline{idf}$ кратно $\overline{fdi}$? (*Л. С. Корешкова*)

6. Кресла на кресельном подъёмнике Розы Хутор пронумерованы последовательно: 1, 2, 3 и т. д. Расстояния между каждыми двумя соседними сиденьями одинаковы. Во время грозы кресельный подъёмник остановился, и в этот момент кресло 22 находилось на одной высоте с креслом 59, а кресло 93 — на той же высоте, что и кресло 142. Определите количество кресел на кресельном подъёмнике. (*Л. С. Корешкова*)

7. У Софьи есть семь подруг: Алина, Бэлла, Вика, Галя, Дана, Елена, Жанна. Их фотографии (всего 7 штук — по одной на каждую подругу) лежат у Софьи в двух стопках в случайном порядке. За один ход Софья берёт несколько (одну или более) подряд лежащих фотографий с верха любой стопки и, не меняя порядка, кладёт их сверху другой стопки. Всегда ли Софья, сделав не более 13 ходов, сможет сложить фотографии всех подруг в одну стопку, упорядоченную по алфавиту их имён (считая снизу вверх)? (*С. П. Павлов*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 7 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2024-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2024 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

1. Можно ли в квадрате 3×3 разместить все числа от 1 до 9 так, чтобы сумма любых двух чисел, соседних по стороне, являлась простым числом? *(М. В. Карлукова)*
2. Катя нарисовала у себя в тетради квадраты с чётными сторонами от 2 клеток до 2024 клеток. Ира же под каждым Катиным квадратом нарисовала прямоугольник с тем же периметром, но на 1 меньшей ширины, чем у квадрата. У кого из девочек получилась бóльшая суммарная площадь (в клетках) и на сколько? *(П. Д. Муленко)*
3. Найдите все четвёрки различных цифр $a < b < c < d$, такие что $\overline{ab} \cdot \overline{dc} = \overline{ba} \cdot \overline{cd}$.
   Примечание. Запись $\overline{ab}$ означает двузначное число, составленное из цифр a и b. *(Л. С. Корешкова)*
4. Костя и Маша по очереди ставят в клетки доски 8×8 числа $+1$ и -1 (начинает Костя) по следующим правилам:
   - перед каждым ходом игрок выбирает число и цвет (красный, зелёный или синий), которым напишет выбранное число в произвольной свободной клетке доски;
   - если после хода игрока сумма чисел выбранного им цвета оказалась равной нулю, этот игрок автоматически считается проигравшим;
   - после заполнения доски подсчитываются суммы чисел каждого цвета: если произведение этих сумм положительно, то побеждает Костя, а если отрицательно — то Маша; если какой-либо цвет так и не был использован, он не участвует в подсчёте.

   Кто может обеспечить себе победу, и как для этого необходимо действовать? *(П. Д. Муленко)*
5. У Софьи есть десять подруг: Алина, Валерия, Диана, Екатерина, Жанна, Инна, Карина, Лилия, Марина, Ольга. Их фотографии (всего 10 штук — по одной на каждую подругу) лежат у Софьи в двух стопках в случайном порядке. За один ход Софья берёт несколько (одну или более) подряд лежащих фотографий с верха любой стопки и, не меняя порядка, кладёт их сверху другой стопки. Всегда ли Софья, сделав не более 21 хода, сможет сложить фотографии всех подруг в одну стопку, упорядоченную по алфавиту их имён (считая снизу вверх)? *(С. П. Павлов)*
6. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.
   - Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
   - Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.
   - Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
   - Никакие два ребёнка одного пола не знакомы между собой.
   - Любой ребёнок может передать шпаргалку в руки любому своему знакомому.

   Оказалось, что любая девочка может отправить шпаргалку любому мальчику (даже незнакомому через других детей), но, стоит организаторам начать пристально следить хотя бы за одной парой знакомых детей, эта возможность нарушится (то есть найдутся такие мальчик и девочка, которые не смогут передать друг другу шпаргалку). Кого пришло на олимпиаду больше (мальчиков или девочек) и на сколько? *(Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко)*
7. Два продуктовых автомата продают один и тот же бургер, но каждый из них сломан и изменяет все числа на экране на некоторое постоянное значение (вся остальная информация верна). Компания, обслуживающая эти автоматы, на время ремонта решила вывести сооответствующие уведомления. На экранах при этом высветилось следующее:

Другой автомат выводит все числа на экране на 2 больше, чем они есть на самом деле. Бургер: **$2**	*Другой автомат выводит все числа на экране на 8 меньше, чем они есть на самом деле.* Бургер: **$10**

   Какова реальная цена бургера? *(П. Д. Муленко)*

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 8 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2024-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2024 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

1. Фигура «*слонь*» делает один ход как слон, следующий — как конь, далее — как слон и т.д. (иными словами, ходы слона и коня чередуются). Может ли она обойти шахматную доску, побывав на каждой клетке ровно один раз? (*О. А. Пяйве*)
2. Конструктор состоит из белых кубиков. Паша собирает из кубиков большой куб, затем выбирает 4 грани куба и красит их в красный цвет. После чего разбирает большой куб и считает кубики, у которых по крайней мере одна грань окрашена в красный цвет. У Паши получился 431 такой кубик. Могло ли такое произойти? Если да, то найдите все варианты общего количества кубиков. (*Л. С. Корешкова*)
3. В трапеции $ABCD$ основание CD равно 24, $AD = 44$, а угол B в 2 раза меньше угла D. Какова максимально возможная площадь трапеции? (*Л. С. Корешкова, А. А. Теслер*)
4. Два продуктовых автомата продают один и тот же бургер, но каждый из них сломан и изменяет все числа на экране в некоторое постоянное количество раз (вся остальная информация верна). Компания, обслуживающая эти автоматы, на время ремонта решила вывести сооответствующие уведомления. На экранах при этом высветилось следующее:

*Другой автомат выводит все числа на экране на **100%** больше, чем они есть на самом деле.* Бургер: **$2**	*Другой автомат выводит все числа в **6** раз меньше, чем они есть на самом деле.* Бургер: **$12**

   Какова реальная цена бургера? (*П. Д. Муленко*)
5. У Софьи есть N подруг с разными именами: Алина, Бэлла, Вика, ..., Яна. Их фотографии (всего N штук — по одной на каждую подругу) лежат у Софьи в двух стопках в случайном порядке. За один ход Софья берёт несколько (одну или более) подряд лежащих фотографий с верха любой стопки и, не меняя порядка, кладёт их сверху другой стопки. Всегда ли Софья, сделав не более $2N+1$ ходов, сможет сложить фотографии всех подруг в одну стопку, упорядоченную по алфавиту их имён (считая снизу вверх)? (*С. П. Павлов*)
6. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.
   - Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
   - Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.
   - Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
   - Никакие два ребёнка одного пола не знакомы между собой.
   - Любой ребёнок может передать шпаргалку в руки любому своему знакомому.

   Оказалось, что любая девочка может отправить шпаргалку любому мальчику (даже незнакомому через других детей), но, стоит организаторам начать пристально следить хотя бы за одной парой знакомых детей, эта возможность нарушится (то есть найдутся такие мальчик и девочка, которые не смогут передать друг другу шпаргалку). Кого пришло на олимпиаду больше (мальчиков или девочек) и на сколько? (*Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко*)
7. Александра, Владимир, Любовь и Оксана выписывают натуральные числа, состоящие из пяти различных ненулевых цифр.
   - Александра выписывает все числа, у которых первая цифра — 1.
   - Владимир выписывает все числа, первые две цифры которых — 1 и 2 в любом порядке.
   - Любовь выписывает все числа, первые три цифры которых — это 1, 2 и 3 в любом порядке.
   - Оксана выписывает все числа, первые 4 цифры которых — 1, 2, 3 и 4 в любом порядке.

   Сколько пятизначных чисел из различных ненулевых цифр не появились ни в одном из списков? (*Л. С. Корешкова*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 9 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2024-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2024 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Несколько ребят решили устроить серию испытаний на выбывание, победитель которой получит звание короля класса. В интервью школьной газете победитель рассказал следующее:
   (a) В первом и последнем испытаниях в сумме выбыло столько же, сколько во всех остальных вместе взятых.
   (b) Во втором испытании выбыло столько же, сколько и во всех последующих вместе взятых.
   (c) В первом испытании выбыло меньше всего участников.
   Докажите, что он где-то ошибся. (*П. Д. Муленко*)

2. Конструктор состоит из белых кубиков. Паша собирает из кубиков большой куб, затем выбирает 4 грани куба и красит их в красный цвет. После чего разбирает большой куб и считает кубики, у которых по крайней мере одна грань окрашена в красный цвет. У Паши получилось больше 500, но меньше 600 таких кубиков. А сколько именно? Найдите все варианты. (*Л. С. Корешкова*)

3. В треугольнике ABC угол A равен 135°, $AB = 14$, $BC = 26$. Точка H является основанием высоты из точки A, M — середина AC. Найдите HM. (*Л. С. Корешкова*)

4. Решите уравнение $[x]^2 + \{x\}^2 = 2x^2$. (Здесь $[x]$ и $\{x\}$ — целая и дробная части x.) (*С. П. Павлов*)

5. Назовём *уникводратной* дробь вида $\dfrac{1}{n^2}$, где n — натуральное число. Найдите максимальную уникводратную дробь, представимую в виде суммы двух уникводратных дробей. (*С. П. Павлов, А. А. Теслер*)

6. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.
   - Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
   - Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.
   - Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
   - Никакие два ребёнка одного пола не знакомы между собой.
   - Любой ребёнок может передать шпаргалку в руки любому своему знакомому.

   Оказалось, что любая девочка может отправить шпаргалку любому мальчику (даже незнакомому через других детей), но, стоит организаторам начать пристально следить хотя бы за одной парой знакомых детей, эта возможность нарушится (то есть найдутся такие мальчик и девочка, которые не смогут передать друг другу шпаргалку). Кого пришло на олимпиаду больше (мальчиков или девочек) и на сколько? (*Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко*)

7. Можно ли разрезать квадрат 100×100 по границам клеток на 2024 прямоугольника так, чтобы объединение никакого набора от 2 до 2023 прямоугольников не являлось прямоугольником? (*А. А. Теслер*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 10 класса

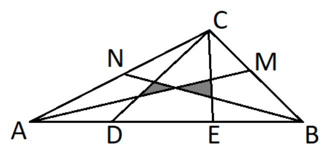
Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2024-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2024 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. В 10А и 10Б классах учатся по 30 человек. Средний рост мальчиков в 10А классе больше, чем средний рост мальчиков в 10Б. И средний рост девочек в 10А классе больше, чем средний рост девочек в 10Б. Может ли оказаться, что средний рост всех учеников 10А класса меньше, чем средний рост всех учеников 10Б? (*А. А. Теслер*)

2. Функция f задана формулой $f(x) = \dfrac{2x}{3x^2+1}$. Докажите, что для любых двух вещественных взаимно обратных чисел s и t сумма $f(s)+f(t)$ не превосходит 1. (*С. П. Павлов*)

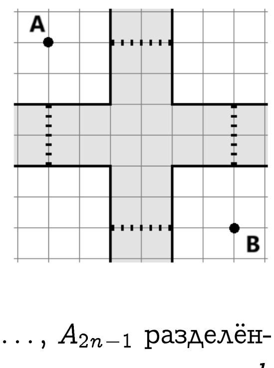
3. В треугольнике ABC проведены две медианы AM и BN. Третья вершина C соединена с точками D и E, которые делят AB на три равные части. Какую долю площади треугольника ABC занимают два закрашенных треугольника? (*Л. С. Корешкова*)



4. В мешке для игры в лото лежат 10 бочонков со следующими числами: 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20, 30, 53, 75. Из мешка вынимаются три бочонка и из чисел, которые можно образовать, расставляя их, записывается наибольшее. Пример: если вы вытащили бочонки 7, 20, 30, то вы запишете число 73020. Сколько чисел, больших 2024, можно записать? (*Л. С. Корешкова*)

5. На плане показан перекрёсток Горизонтальной и Вертикальной улиц (сторона клетки равна 5 метрам, переходы показаны пунктиром). Сигналы светофоров чередуются с периодом 2 минуты по следующему графику:
   - 40 секунд горит зелёный для пешеходов, переходящих Горизонтальную улицу;
   - далее 20 секунд для всех пешеходов красный;
   - следующие 40 секунд — зелёный для переходящих Вертикальную улицу;
   - и последние 20 секунд — снова красный для всех пешеходов.

   Егор ходит со скоростью 1 м/с. В случайный момент времени он оказывается в точке A, откуда наиболее быстрым способом, не нарушающим правил, переходит в точку B. При этом Егор видит, сколько времени осталось до смены цвета на каждом светофоре, и не начинает переходить через дорогу, если не успеет завершить переход. Сколько секунд в среднем пройдёт, прежде чем Егор попадёт в точку B? (*А. А. Теслер*)



6. На отрезке FI как на диаметре построена полуокружность, точками $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ разделённая на равные дуги ($n > 2$). На отрезке отметили точку D, и оказалось, что при некотором k ($1 \leqslant k < \frac{n}{2}$) синусы углов A_kDA_{2n-k} и $A_{n-k}DA_{n+k}$ равны. Докажите, что D — середина FI. (*П. Д. Муленко*)

7. Можно ли разрезать квадрат 100×100 по границам клеток на 2024 прямоугольника так, чтобы объединение никакого набора от 2 до 2023 прямоугольников не являлось прямоугольником? (*А. А. Теслер*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Отборочный этап

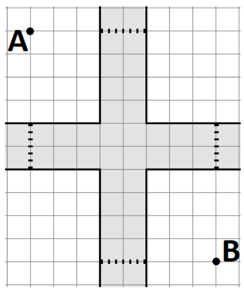
Задачи для 11 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2024-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2024 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Решите уравнение $[x]^2 + 2\{x\}^2 = 2x^2$. (Здесь $[x]$ и $\{x\}$ — целая и дробная части x.) (*С. П. Павлов*)
2. Костя и Маша по очереди ставят в клетки доски 8×8 числа $+1$ и -1 (начинает Костя) по следующим правилам:
   - перед каждым ходом игрок выбирает число и цвет (красный, зелёный или синий), которым напишет выбранное число в произвольной свободной клетке доски;
   - если после хода игрока сумма чисел выбранного им цвета оказалась равной нулю, этот игрок автоматически считается проигравшим;
   - после заполнения доски подсчитываются суммы чисел каждого цвета: если произведение этих сумм положительно, то побеждает Костя, а если отрицательно — то Маша; если какой-либо цвет так и не был использован, он не участвует в подсчёте.

   Кто может обеспечить себе победу, и как для этого необходимо действовать? (*П. Д. Муленко*)
3. Назовём *уникварадратной* дробь вида $\dfrac{1}{n^2}$, где n — натуральное число. Найдите максимальную уникварадратную дробь, представимую в виде суммы двух уникварадратных дробей. (*С. П. Павлов, А. А. Теслер*)
4. Через центр бумажного равностороннего треугольника площади 1 проведена прямая, не проходящая через вершину. Если согнуть треугольник по этой прямой, то некий четырёхугольник окажется покрыт дважды. Какова минимально возможная площадь этого четырёхугольника? (*Л. С. Корешкова*)
5. На плане показан перекрёсток Горизонтальной и Вертикальной улиц (сторона клетки равна 5 метрам, переходы показаны пунктиром). Сигналы светофоров чередуются с периодом 2 минуты по следующему графику:
   - 40 секунд горит зелёный для пешеходов, переходящих Горизонтальную улицу;
   - далее 20 секунд для всех пешеходов красный;
   - следующие 40 секунд — зелёный для переходящих Вертикальную улицу;
   - и последние 20 секунд — снова красный для всех пешеходов.

   Егор ходит со скоростью 1 м/с. В случайный момент времени он оказывается в точке A, откуда наиболее быстрым способом, не нарушающим правил, переходит в точку B. При этом Егор видит, сколько времени осталось до смены цвета на каждом светофоре, и не начинает переходить через дорогу, если не успеет завершить переход. Сколько секунд в среднем пройдёт, прежде чем Егор попадёт в точку B? (*А. А. Теслер*)
6. В школе, где учится Алиса, ставят отметки 1, 2, 3, 4 и 5. Алиса за первую четверть получила ровно 60 отметок. Перемножив их, она получила число, сумма цифр которого равна 12. Каково максимально возможное среднее арифметическое Алисиных оценок? (*А. А. Теслер*)
7. У Испытателя есть Полигон в виде квадрата. В известной точке Полигона находится Источник, испускающий 10 типов излучений, которые распространяются по прямым и кривым траекториям, но не могут пересекать загородки (для каждого излучения свой вид загородки). Излучения делятся на полезные и вредные (возможно, все 10 полезны или все 10 вредны), причём Испытатель не знает, какие излучения полезны. Благоприятна для жизни та зона, в которую проникают все полезные излучения и не проникают вредные.

   Испытатель готовится к эксперименту: он устанавливает 10 загородок (по одной каждого типа) так, чтобы каждая загородка делила Полигон на две части. После этого он включит Источник, и эксперимент начнётся. Испытатель хочет, чтобы благоприятная зона оказалась связной (то есть не состояла из нескольких отдельных частей), а её площадь составляла $\frac{1}{1024}$ от площади квадрата. Может ли он установить загородки так, чтобы гарантировать это? Две загородки могут пересекаться лишь в конечном числе точек; проводить загородку через Источник нельзя. (*А. А. Теслер*)