



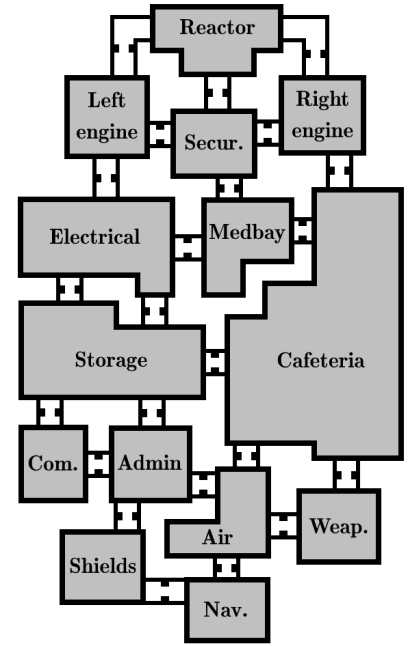
Uluslararası Matematik Olimpiyatı
“Birlik Formülü” / “Üçüncü Milenyum”
2022–2023 Eğitim Yılı. Eleme Turu
R5. Sınıf / Problemler



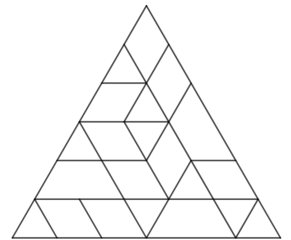
Kağıdınızı elektronik bir şekilde (örneğin .doc formatı veya tarama) yollayınız. Bazı detaylar formulo.org/tr/olymp/2022-math-tr web sitesindedir. Kağıdınızı yollamak için son tarih — 9 Kasım 2022 saat 23:59:59 (UTC)'dir (yani Türkiye vakti ile 10 Kasım saat 02:59:59).

Lütfen soruları tek başınıza çözünüz. Soruların çoğunun çözümlerin yanısıra kanıtlarında gerektirdiğini unutmayın. Kağıtta katılımcının hiçbir kişisel verisi bulunmamalıdır, kağıdınıza isim ve soyisim yazılmamalıdır.

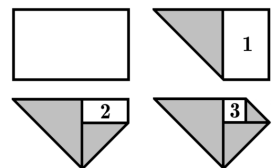
1. Bir daire 3 çizgi ile 7 parçaya bölünmüştür. 1'den 7'ye kadar olan sayıları bu kısımlara (her kısımda bir sayı) her çizginin bir tarafındaki sayıların toplamı diğer taraftaki sayıların toplamına eşit olacak şekilde yazmak mümkün müdür?
2. Marina'nın Olimpiyat'a katılması için bir defter, tükenmez kalem, cetvel, kurşun kalem ve silgi alması gerekiyor. Defter, kurşun kalem ve silgi alırsa 47 tugrik harcamaktadır. Defter, cetvel ve tükenmez kalem alırsa 58 tugrik harcamaktadır. Eğer defter 15 tugrik olursa tüm set için ne kadar paraya ihtiyacı olacaktır?
3. Bir araştırma uzay aracında *Reactor* arızası var ve zehirli maddeler sızdırıyor. Odalar arasındaki tüm koridorlar hava geçirmez kapılarla donatılmıştır, ancak tek tek kapıları kapatmak için zaman yoktur. Ancak kaptanın “ N tane kapıyı kapat” komutunu vermesi için zamanı olabilir, bunun ardından geminin yapay zekası rastgele N tane kapıyı kapatacaktır. *Cafeteria* odasındaki tüm ekibin korunabilmesini garantilemek için en küçük N nedir?
4. Her zaman doğruyu söyleyen şövalyeler ve her zaman yalan söyleyen yalancılar adasında bir okul açtılar. Farklı boyda $2N$ öğrencinin tümü bir çember etrafına dizildi, ardından herkes şöyle dedi: “Tam karşımda duran kişiden daha uzunum!”. Okulda kaç şövalye vardır?



5. Kate tahtaya 5 ile bölünebilen bir sayı yazdı ve alfabetik bulmaca kurallarına göre şifreledi (farklı harfler farklı sayılara, aynı harfler — aynı sayılara karşılık gelir). Sonuç GUATEMALA kelimesiydi. Kate tahtaya kaç farklı sayı yazabilir?
6. Resimdeki üçgeni işaretli çizgiler boyunca üç eşit parçaya kesin (parçalar hem şekil hem de boyut olarak eşleşirse eşit olarak adlandırılır).
7. Üç araba A , B ve C aynı anda dairesel pistin aynı noktasından yola çıkıyor. A ve B saat yönünde hareket ederken C saat yönünün tersine hareket eder. Tüm arabalar sabit (ancak birbirlerinden farklı) hızlarda hareket eder. Yarışın başlamasından tam 7 dakika sonra, A ilk kez C ile buluşur. 46 dakika daha sonra, A ve B ilk kez buluşurlar. Yarışın başlamasından ne kadar süre sonra üç araba ilk kez buluşacak?



8. Bir tarafı beyaz, diğer tarafı gri olan dikdörtgen bir sayfa var. Resimde görüldüğü gibi bükülmüştür. Birinci dikdörtgenin çevresi, ikinci dikdörtgenin çevresinden 20 fazladır. Ve ikinci dikdörtgenin çevresi, üçüncü dikdörtgenin çevresinden 16 fazladır. Başlangıçtaki tam sayfanın çevresini bulunuz.



Problem yazarları: L. Koreshkova (1, 7, 8), P. Mulenko (2, 3, 4, 5, 6).



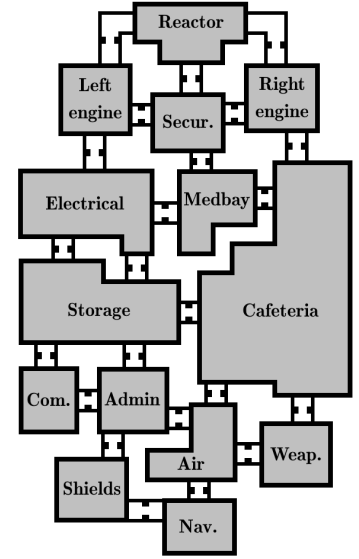
Uluslararası Matematik Olimpiyatı
“Birlik Formülü” / “Üçüncü Milenyum”
2022–2023 Eğitim Yılı. Eleme Turu
R6. Sınıf / Problemler



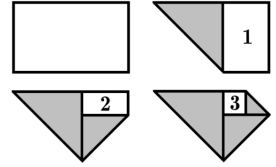
Kağıdınızı elektronik bir şekilde (örneğin .doc formatı veya tarama) yollayınız. Bazı detaylar formulo.org/tr/olymp/2022-math-tr web sitesindedir. Kağıdınızı yollamak için son tarih — 9 Kasım 2022 saat 23:59:59 (UTC)'dir (yani Türkiye vakti ile 10 Kasım saat 02:59:59).

Lütfen soruları tek başınıza çözünüz. Soruların çoğunun çözümlerin yanısıra kanıtlarında gerektirdiğini unutmayın. Kağıtta katılımcının hiçbir kişisel verisi bulunmamalıdır, kağıdınıza isim ve soyisim yazılmamalıdır.

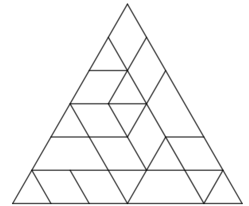
1. Bir daire 3 çizgi ile 7 parçaya bölünmüştür. Ardışık 7 pozitif tam sayıyı, her bölgede birer tane olacak şekilde, her bir doğrunun bir ve diğer tarafındaki sayıların toplamları eşit olacak şekilde dağıtmak mümkün müdür?
2. Olimpiyata katılması için Marina'nın bir defter, tükenmez kalem, cetvel ve kurşun kalem alması gerekiyor. Defter, kurşun kalem ve cetvel alırsa 47 tugrik harcamaktadır. Defter, cetvel ve tükenmez kalem alırsa 58 tugrik harcamaktadır. Sadece bir tükenmez kalem ve kurşun kalem alırsa, 15 tugrik harcamaktadır. Bütün set için ne kadar paraya ihtiyacı olacaktır?
3. Bir araştırma uzay aracı, geminin gövdesine zarar verebilecek ve basınçsızlaşmaya neden olabilecek bir asteroit kuşağına girer. Odalar arasındaki tüm koridorlar hava geçirmez kapılarla donatılmıştır. Kaptanın geçtiği koridorlarda kapıları kapatabilen (ama geri açamayan) bir yardımcı droidi vardır. Droid gemideki tüm kapıları kapatabilecek mi?



4. Bir tarafı beyaz, diğer tarafı gri olan dikdörtgen bir sayfa var. Resimde görüldüğü gibi bükülmüştür. Birinci dikdörtgenin çevresi, ikinci dikdörtgenin çevresinden 20 fazladır. Ve ikinci dikdörtgenin çevresi, üçüncü dikdörtgenin çevresinden 16 fazladır. Başlangıçtaki tam sayfanın çevresini bulunuz.
5. Kate tahtaya 25 ile bölünebilen bir sayı yazdı ve alfabetik bulmaca kurallarına göre şifreledi (farklı harfler farklı sayılara, aynı harfler — aynı sayılara karşılık gelir). Sonuç GUATEMALA kelimesiydi. Kate tahtaya kaç farklı sayı yazabilir?



6. Resimdeki üçgeni işaretli çizgiler boyunca üç eşit parçaya kesin (parçalar hem şekil hem de boyut olarak eşleşirse eşit olarak adlandırılır).



7. Her zaman doğruyu söyleyen şövalyeler ve her zaman yalan söyleyen yalancılar adasında bir okul açtılar. $2N$ öğrencinin tamamı ikişer ikişer (yani iki sütun) sıralanır. İlk ayakta duran iki kişi, “Ben iki kişiden uzunum: çiftteki komşum ve arkamdaki kişiden” dediler. Son ikisi şöyle dedi: “Ben de iki kişiden uzunum: komşum bir çift komşum ve karşımdaki kişiden.” Sonunda herkes şöyle dedi: “Ama ben üç kişiden daha uzunum: bir çift komşum, önümdeki kişi ve arkamdaki kişiden.”
 - a) Öğrenciler arasında mümkün olan en fazla şövalye sayısını bulun.
 - b) Bütün öğrencilerin yalancı olması mümkün müdür?

8. Dört araba A , B , C ve D aynı anda dairesel pistin aynı noktasından yola çıkıyor. A ve B saat yönünde hareket ederken C ve D saat yönünün tersine hareket eder. Tüm arabalar sabit (ancak birbirlerinden farklı) hızlarda hareket eder. Yarışın başlamasından tam 7 dakika sonra, A ilk kez C ile buluşur ve aynı anda B ilk kez D ile. 46 dakika daha sonra, A ve B ilk kez buluşurlar. Yarışın başlamasından ne kadar süre sonra C ve D ilk kez buluşacak?

Problem yazarları: L. Koreshkova (1, 4, 7, 8), P. Mulenko (2, 3, 5, 6).



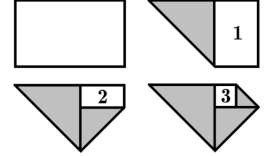
Uluslararası Matematik Olimpiyatı
“Birlik Formülü” / “Üçüncü Milenyum”
2022–2023 Eğitim Yılı. Eleme Turu
R7. Sınıf / Problemler



Kağıdınızı elektronik bir şekilde (örneğin .doc formatı veya tarama) yollayınız. Bazı detaylar formulo.org/tr/olymp/2022-math-tr web sitesindedir. Kağıdınızı yollamak için son tarih — **9 Kasım 2022 saat 23:59:59 (UTC)**'dir (yani Türkiye vakti ile 10 Kasım saat 02:59:59).

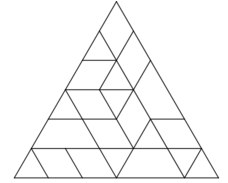
Lütfen soruları tek başınıza çözünüz. Soruların çoğunun çözümlerin yanısıra kanıtlarında gerektirdiğini unutmayın. Kağıtta katılımcının hiçbir kişisel verisi bulunmamalıdır, kağıdınıza isim ve soyisim yazılmamalıdır.

1. Bir tarafı beyaz, diğer tarafı gri olan dikdörtgen bir sayfa var. Resimde görüldüğü gibi bükülmüştür. Birinci dikdörtgenin çevresi, ikinci dikdörtgenin çevresinden 20 fazladır. Ve ikinci dikdörtgenin çevresi, üçüncü dikdörtgenin çevresinden 16 fazladır. Başlangıçtaki tam sayfanın alanını bulunuz.



2. Resimdeki üçgeni işaretli çizgiler boyunca üç eşit parçaya kesin (parçalar hem şekil hem de boyut olarak eşleşirse eşit olarak adlandırılır).

3. Kate tahtaya 8 ile bölünebilen bir sayı yazdı ve alfabetik bulmaca kurallarına göre şifreledi (farklı harfler farklı sayılara, aynı harfler — aynı sayılara karşılık gelir). Sonuç GUATEMALA kelimesiydi. Kate tahtaya kaç farklı sayı yazabilir?



4. Dört araba A , B , C ve D aynı anda dairesel pistin aynı noktasından yola çıkıyor. A ve B saat yönünde hareket ederken C ve D saat yönünün tersine hareket eder. Tüm arabalar sabit (ancak birbirlerinden farklı) hızlarda hareket eder. Yarışın başlamasından tam 7 dakika sonra, A ilk kez C ile buluşur ve aynı anda B ilk kez D ile. 46 dakika daha sonra, A ve B ilk kez buluşurlar. Yarışın başlamasından ne kadar süre sonra dört arabanın hepsi ilk kez buluşacak?

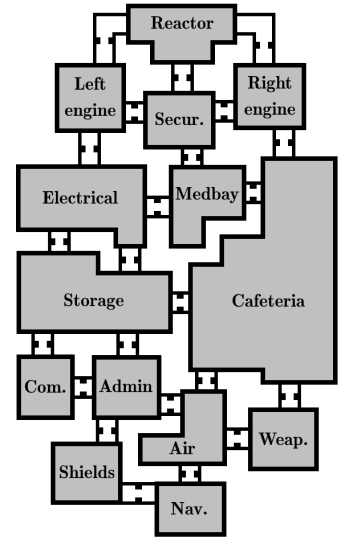
5. İlk 2022 doğal sayısının kareleri arka arkaya yazılır: 1, 4, 9, ..., 4088484. İlk ve sonuncusu hariç yazılan her sayı için sol ve sağ komşularının aritmetik ortalaması hesaplanıp altına yazılmıştır (örneğin 4 sayısının altına $\frac{1+9}{2} = 5$ yazmışlar). Ortaya çıkan 2020 sayı dizisi için de aynısını yaptık. Böylece sadece iki sayının olduğu bir satıra ulaşana kadar devam ettiler. Bu sayıları bulunuz?

6. Bir araştırma uzay aracında *Reactor* arızası var ve zehirli maddeler sızdırıyor. Odalar arasındaki tüm koridorlar hava geçirmez kapılarla donatılmıştır, ancak tek tek kapıları kapatmak için zaman yoktur. Ancak kaptanın “ N tane kapıyı kapat” komutunu vermesi için zamanı olabilir, bunun ardından geminin yapay zekası rastgele N tane kapıyı kapatacaktır. Geminin bölmelerinden en az birinin yaşanabilir kalmasını garanti etmek için minimum N nedir?

7. Ondalık gösteriminde herhangi bir basamağında sıfır veya aynı rakam içermeyecek şekilde tüm basamaklarındaki rakamların çarpımı, bu basamaklarındaki rakamların toplamına bölünebiliyorsa bunu sağlayan pozitif tamsayılara *faydalı* sayılar diyelim. Ardışık iki 3 basamaklı *faydalı* sayıları bulunuz.

8. Her zaman doğruyu söyleyen şövalyeler ve her zaman yalan söyleyen yalancılar adasında bir okul açtılar. Farklı boylarda olan $2N$ öğrencinin tamamı ikişer ikişer (yani iki sütun) sıralanır. İlk ayakta duran iki kişi, “Ben iki kişiden uzunum: çiftteki komşum ve arkamdaki kişiden” dediler. Son ikisi şöyle dedi: “Ben de iki kişiden uzunum: bir çift komşum ve karşımdaki kişiden.” Sonunda herkes şöyle dedi: “Ama ben üç kişiden daha uzunum: bir çift komşum, önümdeki kişi ve arkamdaki kişiden.”

- a) Öğrenciler arasında mümkün olan en fazla şövalye sayısını bulun.
b) Bütün öğrencilerin yalancı olması mümkün müdür?



Problem yazarları: L. Koreshkova (1, 4, 8), P. Mulenko (2, 3, 6), A. Tesler (5), S. Pavlov (7).



Uluslararası Matematik Olimpiyatı
“Birlik Formülü” / “Üçüncü Milenyum”
2022–2023 Eğitim Yılı. Eleme Turu
R8. Sınıf / Problemler



Kağıdınızı elektronik bir şekilde (örneğin .doc formatı veya tarama) yollayınız. Bazı detaylar formulo.org/tr/olymp/2022-math-tr web sitesindedir. Kağıdınızı yollamak için son tarih — 9 Kasım 2022 saat 23:59:59 (UTC)'dir (yani Türkiye vakti ile 10 Kasım saat 02:59:59).

Lütfen soruları tek başınıza çözünüz. Soruların çoğunun çözümlerin yanısıra kanıtlarında gerektirdiğini unutmayın. Kağıtta katılımcının hiçbir kişisel verisi bulunmamalıdır, kağıdınıza isim ve soyisim yazılmamalıdır.

1. Bir daire 3 çizgi ile 7 parçaya bölünmüştür. Maria bu kısımlara ardışık 7 pozitif tam sayı yazmak istiyor (her kısımda bir sayı), böylece her çizginin bir tarafındaki sayıların toplamı diğer taraftaki sayıların toplamına eşit oluyor. Bu durumu sağlayan 3 farklı durumun varlığını gösteriniz.
2. Bir dar açılı ABC üçgenin *kırılması*, üçgenin içinde $OA = OB = OC$ olacak şekilde bir O noktası seçildiğinde ve OAB , OAC , OBC üçgenlerine kesildiğinde yapılan işlemdir. Peter 3° , 88° ve 89° açıları olan bir üçgen aldı ve onu üç üçgene böldü. Sonra parçalardan birini (ayrıca dar açılı) seçti ve onu *kırdı*. Böylece tüm üçgenler geniş açılı olana kadar devam etti. Toplam kaç üçgen almıştır?
3. $n > 5$ doğal sayı, n 'nin katı olmayan ancak n 'den küçük tüm doğal sayıların katı olan bir sayı varsa *yeni* olarak adlandırılır. Ardışık yeni tam sayıların maksimum sayısı nedir?
4. Birkaç doğal sayının aritmetik ortalaması 20,22'dir. Bu sayılar arasında iki eşit sayı olduğunu kanıtlayın.
5. İlk 2022 doğal sayısının kareleri arka arkaya yazılır: 1, 4, 9, ..., 4088484. İlk ve sonuncusu hariç yazılan her sayı için sol ve sağ komşularının aritmetik ortalaması hesaplanıp altına yazılmıştır (örneğin 4 sayısının altına $\frac{1+9}{2} = 5$ yazmışlar). Ortaya çıkan 2020 sayı dizisi için de aynısını yaptık. Böylece sadece iki sayının olduğu bir satıra ulaşana kadar devam ettiler. Bu sayıları bulunuz?
6. Dört araba A , B , C ve D aynı anda dairesel pistin aynı noktasından yola çıkıyor. A ve B saat yönünde hareket ederken C ve D saat yönünün tersine hareket eder. Tüm arabalar sabit (ancak birbirlerinden farklı) hızlarda hareket eder. Yarışın başlamasından tam 7 dakika sonra, A ilk kez C ile buluşur ve aynı anda B ilk kez D ile. 46 dakika daha sonra, A ve B ilk kez buluşurlar. Yarışın başlamasından ne kadar süre sonra C ve D ilk kez buluşacak?
7. Her zaman doğruyu söyleyen şövalyeler ve her zaman yalan söyleyen yalancılar adasında bir okul açtılar. Farklı boylarda olan $2N$ öğrencinin tamamı ikişer ikişer (yani iki sütun) sıralanır. İlk ayakta duran iki kişi, “Ben iki kişiden uzunum: çiftteki komşum ve arkamdaki kişiden” dediler. Son ikisi şöyle dedi: “Ben de iki kişiden uzunum: bir çift komşum ve karşımdaki kişiden.” Sonunda herkes şöyle dedi: “Ama ben üç kişiden daha uzunum: bir çift komşum, önümdeki kişi ve arkamdaki kişiden.”
 - a) Öğrenciler arasında mümkün olan en fazla şövalye sayısını bulun.
 - b) Bütün öğrencilerin yalancı olması mümkün müdür?
8. Kate tahtaya 30 ile bölünebilen bir sayı yazdı ve alfabetik bulmaca kurallarına göre şifreledi (farklı harfler farklı sayılara, aynı harfler — aynı sayılara karşılık gelir). Sonuç GUATEMALA kelimesiydi. Kate tahtaya kaç farklı sayı yazabilir?

Problem yazarları: L. Koreshkova (1, 6, 7), A. Tesler (2, 4, 5), O. Pyayve (3), P. Mulenko (8).



Uluslararası Matematik Olimpiyatı
“Birlik Formülü” / “Üçüncü Milenyum”
2022–2023 Eğitim Yılı. Eleme Turu



R9. Sınıf / Problemler

Kağıdınızı elektronik bir şekilde (örneğin .doc formatı veya tarama) yollayınız. Bazı detaylar formulo.org/tr/olymp/2022-math-tr web sitesindedir. Kağıdınızı yollamak için son tarih — 9 Kasım 2022 saat 23:59:59 (UTC)'dir (yani Türkiye vakti ile 10 Kasım saat 02:59:59).

Lütfen soruları tek başınıza çözünüz. Soruların çoğunun çözümlerin yanısıra kanıtlarında gerektirdiğini unutmayın. Kağıtta katılımcının hiçbir kişisel verisi bulunmamalıdır, kağıdınıza isim ve soyisim yazılmamalıdır.

- $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ herhangi sırada 0 dan 9'a kadar olan rakamlardan biri olmak üzere, 21. yüzyılda herhangi bir yıl $\frac{a + b \cdot c \cdot d \cdot e}{f + g \cdot h \cdot i \cdot j}$ şeklinde ifade edilebilir mi?
- Bir daire 3 çizgi ile 7 parçaya bölünmüştür. Maria bu kısımlara 7 farklı pozitif tam sayı yazdı (her kısımda bir sayı), böylece her çizginin bir tarafındaki sayıların toplamı diğer taraftaki sayıların toplamına eşit oldu. Sayılardan biri 0'dır. Başka bir sayının negatif olduğunu kanıtlayın.
- Köy kulübünde bir satranç şampiyonası düzenlenir: her katılımcı her biri ile bir oyun oynamalıdır. Kulüpte sadece bir satranç tahtası vardır, bu nedenle aynı anda iki oyun oynanamaz. Şampiyonanın kurallarına göre, herhangi bir anda farklı katılımcılar tarafından oynanan oyunların sayısı 1'den fazla olmamalıdır. Şampiyonanın ilk birkaç maçı kurallara uygun olarak oynandı. Kurallara uyarak şampiyonluğu tamamlamak her zaman mümkün mü?
- Düzgün bir beşgen 4 parçaya ayrılıyor. Bu parçalar arasında herhangi bir boşluk olmadan ve parçalardan herhangi ikisi üst üste gelemeden bir dikdörtgen elde edilebileceğini ispatlayın.
- Dört araba A, B, C ve D aynı anda dairesel pistin aynı noktasından yola çıkıyor. A ve B saat yönünde hareket ederken C ve D saat yönünün tersine hareket eder. Tüm arabalar sabit (ancak birbirlerinden farklı) hızlarda hareket eder. Yarışın başlamasından tam 7 dakika sonra, A ilk kez C ile buluşur ve aynı anda B ilk kez D ile. 46 dakika daha sonra, A ve B ilk kez buluşurlar. Yarışın başlamasından ne kadar süre sonra C ve D ilk kez buluşacak?
- $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 2abc$ denkleminin kaç pozitif tam sayı çözümü vardır?
- Ondalık gösteriminde herhangi bir basamağında sıfır veya aynı rakam içermeyecek şekilde tüm basamaklarındaki rakamların çarpımı, bu basamaklarındaki rakamların toplamına bölünebiliyorsa bunu sağlayan pozitif tamsayılara *faydalı* sayılar diyelim. Ardışık en büyük iki *faydalı* sayıları bulunuz.
- 10×10 tane birim kareden oluşan kare şeklinde bir park vardır. Birim karelerden herhangi birine sadece bir tane sokak lambası yerleştiriliyor.
 - Bir ziyaretçi bu birim karelerden herhangi biri üzerinde dursun. Eğer 9 birim kareden oluşan bir kare içerisinde bir sokak lambası ve bu ziyaretçi varsa, bu parka *aydınlatılmış* denir. Bütün parkın *aydınlatılmış* olması için en az kaç tane sokak lambası gerekmektedir?
 - Parktaki herhangi bir sokak lambasının bozulması durumunda bile park halen *aydınlatılmış* oluyorsa bu parka *güvenli bir şekilde aydınlatılmış* denir. Bu parkın *güvenli bir şekilde aydınlatılmış* olması için en az kaç sokak lambası gerekir?

Problem yazarları: S. Pavlov (1, 7), L. Koreshkova (2, 5, 6), A. Tesler (3, 4, 8).



Uluslararası Matematik Olimpiyatı
“Birlik Formülü” / “Üçüncü Milenyum”
2022–2023 Eğitim Yılı. Eleme Turu



R10. Sınıf / Problemler

Kağıdınızı elektronik bir şekilde (örneğin .doc formatı veya tarama) yollayınız. Bazı detaylar formulo.org/tr/olymp/2022-math-tr web sitesindedir. Kağıdınızı yollamak için son tarih — 9 Kasım 2022 saat 23:59:59 (UTC)'dir (yani Türkiye vakti ile 10 Kasım saat 02:59:59).

Lütfen soruları tek başınıza çözünüz. Soruların çoğunun çözümlerin yanısıra kanıtlarında gerektirdiğini unutmayın. Kağıtta katılımcının hiçbir kişisel verisi bulunmamalıdır, kağıdınıza isim ve soyisim yazılmamalıdır.

1. Bir daire 3 çizgi ile 7 parçaya bölünmüştür. Maria bu kısımlara 7 farklı pozitif tam sayı yazdı (her kısımda bir sayı), böylece her çizginin bir tarafındaki sayıların toplamı diğer taraftaki sayıların toplamına eşit oldu. Sayılardan biri 0'dır. Başka bir sayının negatif olduğunu kanıtlayın.
2. Köy kulübünde bir satranç şampiyonası düzenlenir: her katılımcı her biri ile bir oyun oynamalıdır. Kulüpte sadece bir satranç tahtası vardır, bu nedenle aynı anda iki oyun oynanamaz. Şampiyonanın kurallarına göre, herhangi bir anda farklı katılımcılar tarafından oynanan oyunların sayısı 1'den fazla olmamalıdır. Herhangi bir sayıda katılımcı ile kurallara uygun bir şampiyona düzenlemenin mümkün olduğunu kanıtlayın.
3. Düzgün bir beşgen 4 parçaya ayrılıyor. Bu parçalar arasında herhangi bir boşluk olmadan ve parçalardan herhangi ikisi üst üste gelemeden bir dikdörtgen elde edilebileceğini ispatlayın.
4. Bir noktadan çembere çizilen teğetler arasındaki açı 60° ise bu noktaya bu çembere göre *UYGUN* nokta diyelim. M noktası birbirine teğet olan A ve B merkezli çemberler için *UYGUN* dur. $\triangle ABM$ bir dik üçgen ise, çemberlerin yarıçapları oranını bulunuz.
5. $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 2abc$ denkleminin kaç pozitif tam sayı çözümü vardır?
6. 10×10 tane birim kareden oluşan kare şeklinde bir park vardır. Birim karelerden herhangi birine sadece bir tane sokak lambası yerleştiriliyor.
 - a) Bir ziyaretçi bu birim karelerden herhangi biri üzerinde dursun. Eğer 9 birim kareden oluşan bir kare içerisinde bir sokak lambası ve bu ziyaretçi varsa, bu parka *aydınlatılmış* denir. Bütün parkın *aydınlatılmış* olması için en az kaç tane sokak lambası gerekmektedir?
 - b) Parktaki herhangi bir sokak lambasının bozulması durumunda bile park halen *aydınlatılmış* oluyorsa bu parka *güvenlikli bir şekilde aydınlatılmış* denir. Bu parkın *güvenlikli bir şekilde aydınlatılmış* olması için en az kaç sokak lambası gerekir?
7. $f(x)$ — doğrusal bir fonksiyondur ve $f(f(x)) = x + 1$ denkleminin çözümü yoktur. $f(f(f(f(f(2022)))))) - f(f(f(2022))) - f(f(2022))$ için olası tüm değerleri bulunuz.
8. 1'den n 'ye kadar tamsayılardan n ile ortak böleni 1'den büyük olan tüm tamsayıların sayısının, n 'ye oranına n tamsayısının *verimliliği* diyelim. Örneğin 6 sayısının verimliliği $\frac{2}{3}$ 'tür.
 - a) Verimliliği %80'den fazla olan tamsayı var mıdır? Eğer varsa, bu tamsayılardan en küçüğü kaçtır?
 - b) Verimliliği en büyük olan (yani verimliliği diğer tamsayıların verimliliğinden küçük olmayan) var mıdır? Eğer varsa, bu tamsayılardan en küçüğü kaçtır?

Problem yazarları: L. Koreshkova (1, 5), A. Tesler (2, 3, 4, 6, 7), O. Pyayve (8).



Uluslararası Matematik Olimpiyatı
“Birlik Formülü” / “Üçüncü Milenyum”
2022–2023 Eğitim Yılı. Eleme Turu



R11. Sınıf / Problemler

Kağıdınızı elektronik bir şekilde (örneğin .doc formatı veya tarama) yollayınız. Bazı detaylar formulo.org/tr/olymp/2022-math-tr web sitesindedir. Kağıdınızı yollamak için son tarih — 9 Kasım 2022 saat 23:59:59 (UTC)'dir (yani Türkiye vakti ile 10 Kasım saat 02:59:59).

Lütfen soruları tek başınıza çözünüz. Soruların çoğunun çözümlerin yanısıra kanıtlarında gerektirdiğini unutmayın. Kağıtta katılımcının hiçbir kişisel verisi bulunmamalıdır, kağıdınıza isim ve soyisim yazılmamalıdır.

1. Ondalık gösteriminde herhangi bir basamağında sıfır veya aynı rakam içermeyecek şekilde tüm basamaklarındaki rakamların çarpımı, bu basamaklarındaki rakamların toplamına bölünebiliyorsa bunu sağlayan pozitif tamsayılara *faydalı* sayılar diyelim. Ardışık en büyük iki *faydalı* sayıları bulunuz.
2. Dört araba A , B , C ve D aynı anda dairesel pistin aynı noktasından yola çıkıyor. A ve B saat yönünde hareket ederken C ve D saat yönünün tersine hareket eder. Tüm arabalar sabit (ancak birbirlerinden farklı) hızlarda hareket eder. Yarışın başlamasından tam 7 dakika sonra, A ilk kez C ile buluşur ve aynı anda B ilk kez D ile. 46 dakika daha sonra, A ve B ilk kez buluşurlar. Yarışın başlamasından ne kadar süre sonra dört arabanın hepsi ilk kez buluşacak?
3. Düzgün bir beşgen 4 parçaya ayrılıyor. Bu parçalar arasında herhangi bir boşluk olmadan ve parçalardan herhangi ikisi üst üste gelemeden bir dikdörtgen elde edilebileceğini ispatlayın.
4. Bir noktadan çembere çizilen teğetler arasındaki açı 60° ise bu noktaya bu çembere göre *UYGUN* nokta diyelim. M noktası birbirine teğet olan A ve B merkezli çemberler için *UYGUN* dur. $\triangle ABM$ bir dik üçgen ise, çemberlerin yarıçapları oranını bulunuz.
5. a, b, c reel sayı olmak üzere;

$$27a^{2+b+c+1} + 27b^{2+c+a+1} + 27c^{2+a+b+1} = 3$$

şartını sağlayan tüm a, b, c üçlülerini bulunuz.

6. 10×10 tane birim kareden oluşan kare şeklinde bir park vardır. Birim karelerden herhangi birine sadece bir tane sokak lambası yerleştiriliyor.
 - a) Bir ziyaretçi bu birim karelerden herhangi biri üzerinde dursun. Eğer 9 birim kareden oluşan bir kare içerisinde bir sokak lambası ve bu ziyaretçi varsa, bu parka *aydınlatılmış* denir. Bütün parkın *aydınlatılmış* olması için en az kaç tane sokak lambası gerekmektedir?
 - b) Parktaki herhangi bir sokak lambasının bozulması durumunda bile park halen *aydınlatılmış* oluyorsa bu parka *güvenli bir şekilde aydınlatılmış* denir. Bu parkın *güvenli bir şekilde aydınlatılmış* olması için en az kaç sokak lambası gerekir?
7. 1'den n 'ye kadar tamsayılardan n ile ortak böleni 1'den büyük olan tüm tamsayıların sayısının, n 'ye oranına n tamsayısının *verimliliği* diyelim. Örneğin 6 sayısının verimliliği $\frac{2}{3}$ 'tür.
 - a) Verimliliği %80'den fazla olan tamsayı var mıdır? Eğer varsa, bu tamsayılardan en küçüğü kaçtır?
 - b) Verimliliği en büyük olan (yani verimliliği diğer tamsayıların verimliliğinden küçük olmayan) var mıdır? Eğer varsa, bu tamsayılardan en küçüğü kaçtır?
8. $f(f(f(f(f(0)))))) = 0$ olacak şekilde sürekli bir f fonksiyonu vardır. $f(f(x)) = x$ denkleminin en az bir çözümü olduğunu kanıtlayın.

Problem yazarları: S. Pavlov (1), L. Koreshkova (2), A. Tesler (3, 4, 6, 8), P. Mullenko (5), O. Pyayve (7).